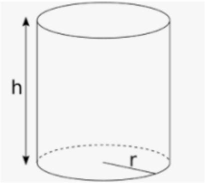
Coordenadas cilíndricas y esféricas

Analía Silva

Universidad Nacional de San Luis

2021

¿ Cómo describimos un cilíndro de radio R y altura h?



Respuesta: Coordenadas cilíndricas

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z$$

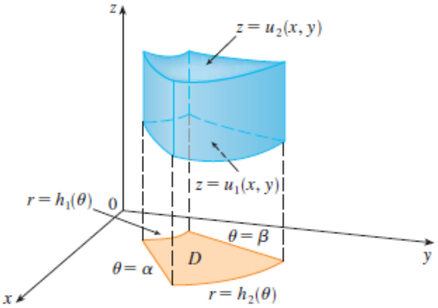
En nuestro caso $0 \le r \le R \qquad 0 \le \theta \le 2\pi \qquad 0 \le z \le h.$

Se dice que una región sólida E es de tipo 1 si está entre las gráficas de dos funciones continuas de x e y, es decir

$$E = \{(x, y, z) \colon (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

Donde D es una región que conviene describirla en coordenadas polares:

$$D = \{(r, \theta) \colon \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}.$$



Recordando que $D = \{(r,\theta)\colon \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$ y

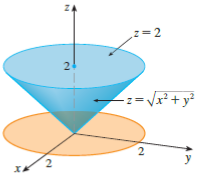
$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z$$

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dA.$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta}\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)}\int_{u_1(r\cos\theta, r\sin\theta)}^{u_2(r\cos\theta, r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\, dzdrd\theta.$$

Observación:

$$dV = r\, dzdrd\theta.$$

Integrar la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ sobre la región sólida E encerrada por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 2$.
Miremos el dibujo



¿ Cómo describimos a E?

$$E = \{(x, y, z) \colon (x, y) \in D_2, \qquad \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}$$

¿ Cómo describimos a E en coordenadas polares?

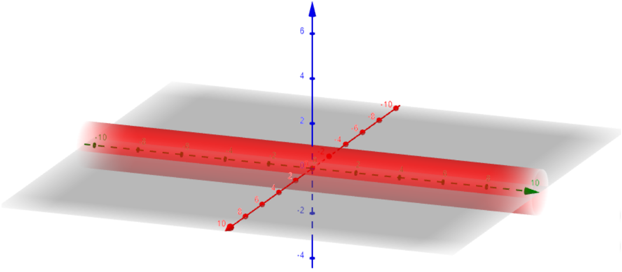
$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z$$

Donde

$$0 \leq r \leq 2 \qquad 0 \leq \theta < 2\pi \qquad r \leq z \leq 2.$$

$$
\begin{aligned}
\iiint_E f(x,y,z)\,dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\,dzdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 [(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2]r\,dzdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 r^3\,dzdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\left[\int_r^2 dz\right]drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3(2-r)drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^2 r^3(2-r)dr \\
&= 2\pi\left[\frac{r^4}{2}-\frac{r^5}{5}\right]_0^2 = \frac{16}{5}\pi.
\end{aligned}
$$

Calcular la integral de $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+z^2}$ sobre
$E = \{(x,y,z) \colon x^2+z^2 = 1 \qquad -10 \leq y \leq 10\}$
Miremos el dibujo



Usemos coordenadas cilíndricas

$$x = r\cos\theta \qquad y = y \qquad z = r\sin\theta$$

$$0 \leq r \leq 1 \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi \qquad -10 \leq y \leq 10$$

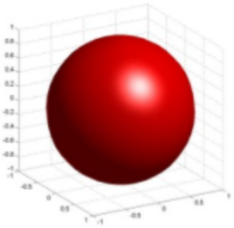
Usando que

$$x = r\cos\theta \qquad y = y \qquad z = r\sin\theta$$

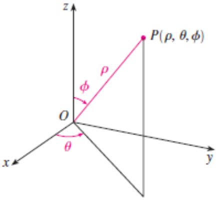
$$0 \leq r \leq 1 \qquad 0 \leq \theta < 2\pi \qquad -10 \leq y \leq 10$$

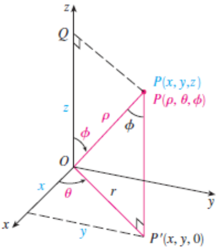
$$\begin{aligned}
\iiint_E f(x,y,z)dV &= \iiint_E \sqrt{x^2+z^2}dV \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-10}^{10} \sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2} r dy d\theta dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-10}^{10} r^2 \, dy d\theta dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \left[\int_{-10}^{10} dy\right] d\theta dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 20 d\theta dr = \int_0^1 r^2 \int_0^{2\pi} 20 d\theta dr \\
&= \int_0^1 r^2 40\pi dr = 40\frac{r^3}{3}\pi\Big|_0^1 = \frac{40}{3}\pi.
\end{aligned}$$

¿Cómo se puede parametrizar las esfera unitaria
$E = \{(x, y, z) \colon x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$?



Hasta ahora sabemos describirla así
$E = \{(x, y, z) \colon -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2} \qquad x^2 + y^2 = 1\}.$





$$\frac{z}{\rho} = \cos\phi \qquad \frac{r}{\rho} = \sin\phi$$

$$z = \rho\cos\phi \qquad r = \rho\sin\phi \qquad \rho \geq 0 \qquad 0 \leq \phi \leq \pi$$

$$x = r\cos\theta = \rho\sin\phi\cos\theta \qquad y = r\sin\theta = \rho\sin\phi\sin\theta \qquad z = \rho\cos\phi$$

Observación: La esfera unitaria se parametriza

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta \qquad y = \rho\sin\phi\sin\theta \qquad z = \rho\cos\phi$$

$$0 \leq \rho \leq 1 \qquad 0 \leq \phi \leq \pi \qquad 0 \leq \theta < 2\pi$$

Coordenadas esféricas

Sea $E = \{(\rho, \theta, \phi) \colon a \leq \rho \leq b, \quad \alpha \leq \theta \leq \beta, \quad c \leq \phi \leq d\}$.
Definimos el cambio de coordenadas esféricas

$$\iiint_E f(x, y, z) dV$$
$$= \int_a^b \int_\alpha^\beta \int_c^d f(\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\phi) \rho^2 \sin\phi \, d\rho d\theta d\phi.$$

Observación:

$$dV = \rho^2 \sin\phi \, d\rho d\theta d\phi.$$

Ejemplo: Calcular

$$\iiint_E x^2 + y^2 + z^2 dV$$

donde E es la esfera unitaria.

$$\iiint_E x^2 + y^2 + z^2 dV$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} [(\rho \sin\phi \cos\theta)^2 + (\rho \sin\phi \sin\theta)^2 + (\rho\cos\phi)^2]\rho^2 \sin\phi \, d\phi d\theta d\rho$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} [(\rho \sin\phi)^2 + (\rho\cos\phi)^2]\rho^2 \sin\phi \, d\phi d\theta d\rho.$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho^4 \sin\phi \, d\phi d\theta d\rho. = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^4 \left[\int_0^{\pi} \sin\phi \, d\phi \right] d\theta d\rho.$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^4 [-\cos\phi|_0^{\pi}] d\theta d\rho = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^4 2 d\theta d\rho$$

$$= \int_0^1 \rho^4 2 \int_0^{2\pi} d\theta d\rho = \int_0^1 \rho^4 4\pi d\rho = 4\pi \frac{\rho^5}{5}|_0^1 = \frac{4\pi}{5}.$$