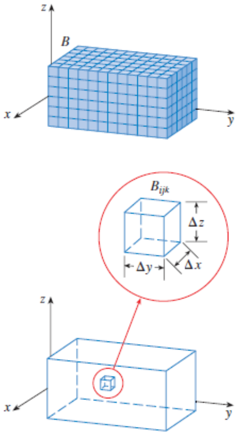
Integrales triples

Analía Silva

Universidad Nacional de San Luis

2021

Queremos integrar $f(x, y, z)$ sobre B definido de la siguiente forma:
$B = \{(x, y, z)\colon a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$



Donde

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

La suma de Riemann es

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta V \qquad \text{donde } \Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$$

Definición

La integral triple sobre B se define como

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta V,$$

si el límite existe.

Observación: Puedo elegir $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) = (x_i, y_j, z_k)$, luego

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} f(x_i, y_j, z_k)\Delta V.$$

¿Qué funciones son integrables?

Respuesta:

Funciones continuas.

Funciones continuas salvo un número finito de curvas suaves.

Propiedades de las integrales

- $\iiint_B (f_1 + f_2) dV = \iiint_B f_1 dV + \iiint_R f_2 dV.$
- $\iiint_B \alpha f dV = \alpha \iiint_B f dV$, donde α es una constante.
- Si $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in B$, entonces

$$\iiint_B f dV \leq \iiint_B g dV.$$

Teorema de Fubini

Sea f una función continua en el cuadro rectangular $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$. Entonces

$$\begin{aligned}
\iiint_B f(x,y,z)dV &= \int_r^s \int_a^b \int_c^d f(x,y,z)dydxdz \\
&= \int_a^b \int_r^s \int_c^d f(x,y,z)dydzdx \\
&= \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x,y,z)dzdydx \\
&= \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)dxdydz \\
&= \int_c^d \int_r^s \int_a^b f(x,y,z)dxdzdy \\
&= \int_c^d \int_a^b \int_r^s f(x,y,z)dxdydz.
\end{aligned}$$

Ejemplo: Sea f continua en $[a,b]$, g continua en $[c,d]$ y h continua en $[r,s]$. Sea $B=[a,b]\times[c,d]\times[r,s]$ mostrar que

$$\iiint_B [f(x)g(y)h(z)]dV = \left[\int_a^b f(x)dx\right]\left[\int_c^d g(y)dy\right]\left[\int_r^s h(z)dz\right]$$

Respuesta:

$$\iiint_B [f(x)g(y)h(z)]dV = \int_r^s \int_c^d \left[\int_a^b f(x)g(y)h(z)\,dx\right]dydz$$

$$= \int_r^s \int_c^d g(y)h(z)\left[\int_a^b f(x)dx\right]dydz$$

$$= \left[\int_a^b f(x)dx\right]\int_r^s \left[\int_c^d g(y)h(z)dy\right]dz$$

$$= \left[\int_a^b f(x)dx\right]\int_r^s h(z)\left[\int_c^d g(y)dy\right]dz$$

$$= \left[\int_a^b f(x)dx\right]\left[\int_c^d g(y)dy\right]\left[\int_r^s h(z)dz\right].$$

¿Qué pasa si quiero integrar en un región en general?

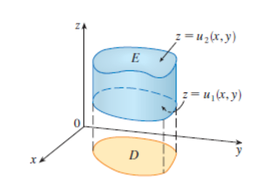
Definición

Sea E una región acotada, tomamos B una caja que contenga E, dada $f : E \mapsto \mathbb{R}$, donde f es continua, extendemos f a una función F definida en todo B de la siguiente forma

$$F(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{si} \quad (x,y,z) \in E \\ 0 & \text{si} \quad (x,y,z) \notin E \text{ y } (x,y,z) \in B \end{cases}$$

entonces

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iiint_B F(x,y,z)dV.$$

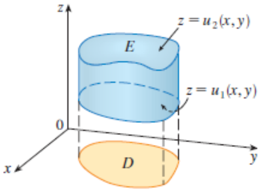


Región del tipo 1

Se dice que una región sólida E es de tipo 1 si está entre las gráficas de dos funciones continuas de x e y, es decir

$$E = \{(x, y, z)\colon (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

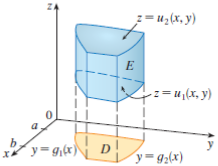
Donde D es la proyección de E sobre el plano xy.



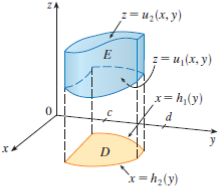
Luego,

$$\iiint_E f(x, y, z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right] dA.$$

Ejemplos de región del tipo 1



$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx.$$



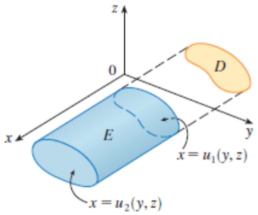
$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dzdxdy.$$

Región del tipo 2

Se dice que una región sólida E es de tipo 2 si está entre las gráficas de dos funciones continuas de y e z, es decir

$$E = \{(x, y, z) \colon (y, z) \in D, u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}$$

Donde D es la proyección de E sobre el plano yz.



Luego,

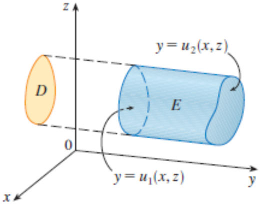
$$\iiint_E f(x, y, z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x, y, z)dx \right] dA.$$

Región del tipo 3

Se dice que una región sólida E es de tipo 3 si está entre las gráficas de dos funciones continuas de x e z, es decir

$$E = \{(x, y, z) \colon (x, z) \in D, u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\}$$

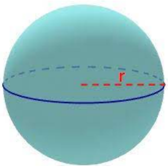
Donde D es la proyección de E sobre el plano xz.

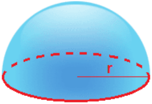


Luego,

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x, y, z) dy \right] dA.$$

Ejemplo: Calcular la integral $f(x,y,z)=1$ sobre $E=\{(x,y,z)\colon x^2+y^2+z^2=1\}$.





Donde
$E=\{(x,y,z)\colon -\sqrt{1-x^2-y^2}\leq z\leq \sqrt{1-x^2-y^2} \qquad x^2+y^2=1\}$.

$$
\begin{aligned}
\iiint_E 1\, dV &= \iint_D \left[\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 1\, dz \right] dA = \iint_D 2\sqrt{1-x^2-y^2}\, dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 2\sqrt{1-r^2}\, r\, dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[-\int_1^0 \sqrt{u}\, du \right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left. \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^1 d\theta = \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4}{3}\pi
\end{aligned}
$$

Donde $u = 1 - r^2 \qquad du = -2rdr.$

Observación:

$$
V(E) = \iiint_E 1\, dV.
$$