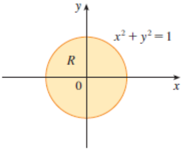
Coordenadas Polares

Analía Silva

Universidad Nacional de San Luis

2021

Sea $f(x,y)$ queremos integrarla sobre la región
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$



Necesitamos poder describir la región D. Sea

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

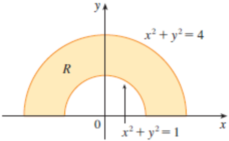
Despejamos la y

$$y^2 \leq 1 - x^2.$$

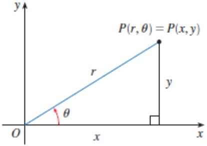
Finalmente,

$$-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

O puedo tener una región D peor...

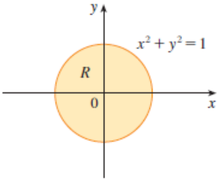


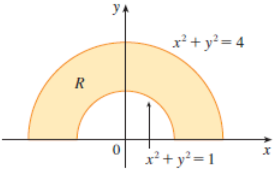
Solución: Para describir estas regiones usamos Coordenadas Polares.



$$\frac{x}{r} = \cos\theta \qquad \frac{y}{r} = \sin\theta$$

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad x^2 + y^2 = r^2$$





Para el disco unitario:

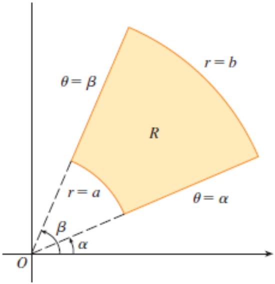
$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad 0 \leq r \leq 1 \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Para el anillo:

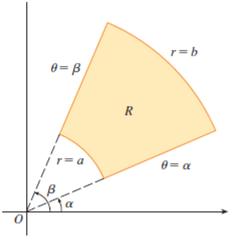
$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad 1 \leq r \leq 2 \qquad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

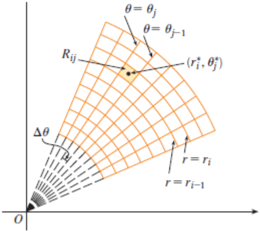
Estas regiones son un caso particular de un rectángulo polar:

$$R = \{(r, \theta) \colon a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$



¿ Cómo integrar sobre un rectángulo polar?

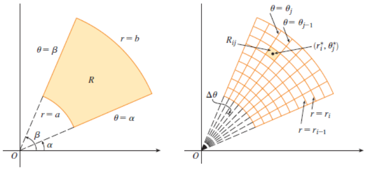




Estamos dividiendo el rectángulo polar de las siguiente forma:

$$\Delta r = \frac{b-a}{m} \qquad \Delta\theta = \frac{\beta - \alpha}{n}.$$

En cada rectángulito polar elijo (r_i^*, θ_j^*) donde $r_i^* = \frac{r_i + r_{i-1}}{2}$ y $\theta_j^* = \frac{\theta_j + \theta_{j-1}}{2}$.



Para calcular el área de cada rectángulito polar

$$\Delta A_i = \pi r_i^2 \frac{\Delta\theta}{2\pi} - \pi r_{i-1}^2 \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta - \frac{1}{2} r_{i-1}^2 \Delta\theta$$
$$= \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\Delta\theta = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\Delta\theta = r_i^* \Delta r \Delta\theta.$$

Para calcular las Summas de Riemann

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \sin\theta_j^*)\Delta A_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \sin\theta_j^*) r_i^* \Delta r \Delta\theta$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(r_i^*, \theta_j^*)\Delta r \Delta\theta.$$

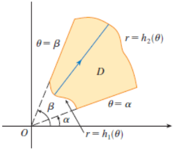
Donde $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)r$.

Cambio a coordenadas polares en una integral doble

Si f es continua en un rectángulo polar R dado por $0 \leq a \leq r \leq b$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, donde $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, entonces

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, d_r d_\theta.$$

Si tenemos algo más general



Si f es continua en una región polar de la forma $D = \{(r,\theta)\colon \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$. Entonces

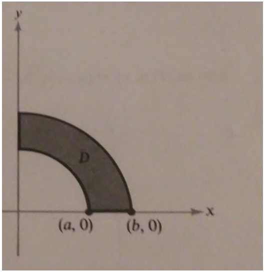
$$\iint_D f(x,y)dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, d_r d_\theta.$$

Ejemplo

Evaluar

$$\iint_D \ln(x^2+y^2)\,dA$$

Donde D es la región en el primer cuadrante que está entre los arcos de los círculos $x^2+y^2=a^2$, $x^2+y^2=b^2$, $0<a<b$.



$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad a \le r \le b \qquad 0 \le \theta \le \frac{1}{2}\pi.$$

$$
\begin{aligned}
\iint_D \ln(x^2+y^2)\,dA &= \int_a^b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta))r\,d\theta dr \\
&= \int_a^b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(r^2) r\,d\theta dr \\
&= \int_a^b \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\ln(r) r\,d\theta dr \\
&= \frac{\pi}{2} \int_a^b 2\ln(r) r\,dr \\
&= \pi \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} \Big|_a^b \right) \\
&= \frac{\pi}{2} \left(b^2 \ln b - a^2 \ln a - \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \right).
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Calcular $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dA$

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dA &= \lim_{R\to\infty} \iint_{B_R(0)} e^{-(x^2+y^2)}\, dA \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)}\, r\, d\theta dr \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-r^2}\, r\, d\theta dr \\
&= \lim_{R\to\infty} 2\pi \int_0^R e^{-r^2}\, r\, dr \\
&= \lim_{R\to\infty} 2\pi \int_0^{R^2} \frac{1}{2} e^{-u}\, du \\
&= \lim_{R\to\infty} \pi \left(-e^{-u} \Big|_0^{R^2} \right) \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Observación

$$\begin{aligned}
\pi = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dA &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} e^{-x^2} e^{-y^2}\, dxdy \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\, dx\right)\left(\int_{-R}^{R} e^{-y^2}\, dy\right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\, dx\right)^2 \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx\right)^2.
\end{aligned}$$

Conclusión

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$