# *Teorema de cambio de variables*

Analía Silva

Universidad Nacional de San Luis

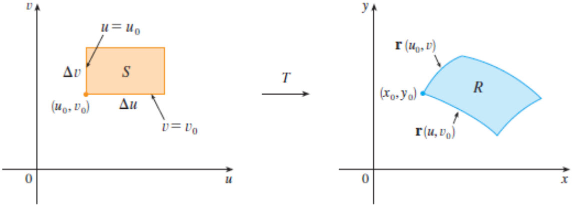
2021

Sea $T$ una transformación del plano $uv$ al plano $xy$ de la siguiente forma

$$T(u,v) = (x,y) = (x(u,v), y(u,v))$$

Ejemplo: $T(r,\theta) = (x(r,\theta), y(r,\theta))$ donde $x(r,\theta) = r\cos\theta$ y $y(r,\theta) = r\sin\theta$.

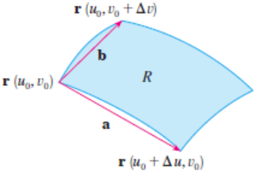
¿ Cómo transforma $T$ un rectángulo?




$$r(u,v) = x(u,v)i + y(u,v)j$$

Si $r(u,v) = x(u,v)i + y(u,v)j$. Entonces

$$r_u = \frac{\partial x}{\partial u} i + \frac{\partial y}{\partial u} j \qquad r_v = \frac{\partial x}{\partial v} i + \frac{\partial y}{\partial v} j$$




Idea: Podemos aproximar $R$ por el paralelogramo formado por $a$ y $b$, donde

$$a = r(u_0 + \Delta u, v_0) - r(u_0, v_0) \qquad b = r(u_0, v_0 + \Delta v) - r(u_0, v_0)$$

Pero recordemos que $r_u = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{r(u_0 + \Delta u, v_0) - r(u_0, v_0)}{\Delta u}$
Entonces $\Delta u r_u \approx a$ y análogamente $\Delta v r_v \approx b$.

$$A(R) \approx |\Delta u r_u \times \Delta v r_v| = |r_u \times r_v| \Delta u \Delta v.$$

Donde

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

*Definición*

El Jacobiano de la transformación $T$ se define como:

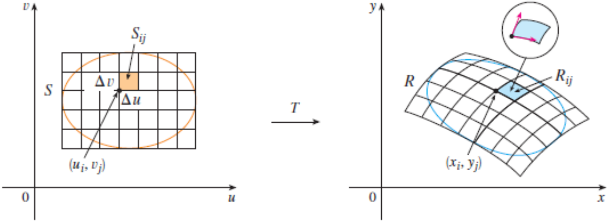
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Ejemplo: Si $T$ es el cambio de coordenadas polares

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

Luego

$$A(R) \approx \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \Delta u \Delta v.$$




$$\iint_R f(x,y)\, dA \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j) \Delta A$$

$$\approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \Delta u \Delta v.$$

### Teorema de cambio de variables para una integral doble

Suponga que $T$ es una transformación $C^1$ cuyo jacobiano es no nulo y que relaciona una región $S$ en el plano $uv$ con una región $R$ en el plano $xy$. Suponga que $f$ es continua sobre $R$, y que $R$ y $S$ son regiones planas tipo I o tipo II. Suponga también que $T$ es uno a uno, excepto quizás en el límite de $S$. Entonces

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_S f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv.$$

Ejemplo: Si $x(r,\theta) = r\cos\theta$ e $y(r,\theta) = r\sin\theta$ con $a \leq r \leq b$ y $\alpha \leq \theta \leq \beta$, entonces

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,drd\theta.$$

# Teorema de cambio de variables para integrales triples

Sea $T$ una transformación que mapea una región $S$ en el espacio $uvw$ sobre una región $R$ en el espacio $xyz$ por medio de las ecuaciones:

$$x = x(u,v,w) \qquad y = y(u,v,w) \qquad z = z(u,v,w)$$

Su Jacobiano es

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Entonces

$$\iiint_R f(x,y,z)\, dV$$
$$= \iiint_S f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dudvdw.$$

Ejemplo: Deducir la fórmula de cambio de coordenadas cilíndricas.
Sea

$$x = x(r, \theta, z) = r\cos\theta \qquad y = y(r, \theta, z) = r\sin\theta \qquad z = z(r, \theta, z)$$

con $a \leq r \leq b \qquad \alpha \leq \theta \leq \beta \qquad c \leq z \leq d.$
Calculemos su Jacobiano

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1. \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

Entonces

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b (r\cos\theta, r\sin\theta, z) r \, dr d\theta dz.$$

Ejercicio: Deducir la fórmula de cambio de coordenadas esféricas.