Integrales dobles

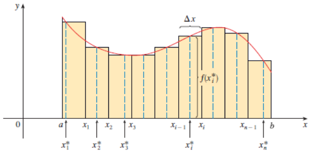
Analía Silva

Universidad Nacional de San Luis

2021

Repaso

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ queremos calcular su integral de f sobre $[a, b]$.
Partimos el intervalo en n intervalos iguales.
Es decir $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, con $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.



Definimos la suma de Riemman como $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$.

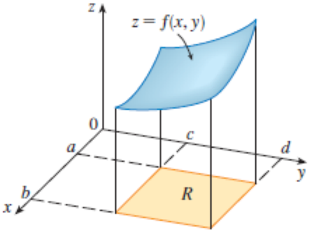
Definición

Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se define su integral como

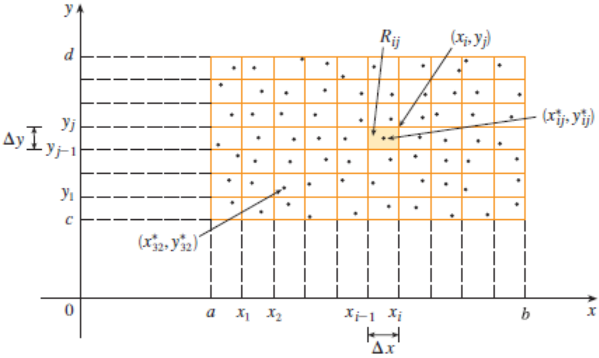
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

Sea $f : R \to \mathbb{R}$ donde
$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.

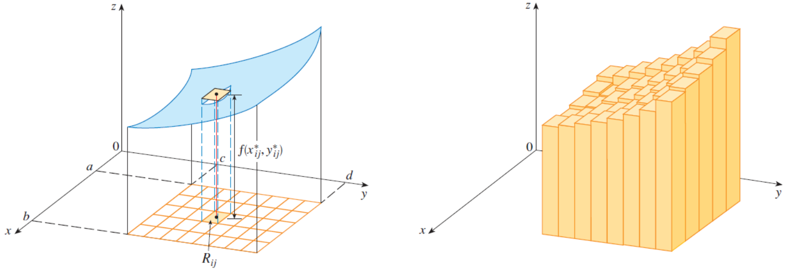
Queremos calcular la integral de f sobre R



- Sea $R = [a, b] \times [c, d]$, tomo $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d$, con $x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$ y $y_{j+1} - y_j = \frac{d-c}{n}$. Luego los rectángulos $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ forman una partición regular P del rectángulo original.



Dibujos para entender...



Comentario: El volumen de cada rectangulito es $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A = f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$.
Entonces el volumen (aprox) es

$$\sum_{i}^{n-1} \sum_{j}^{n-1} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j).$$

- Sea $f : R \mapsto \mathbb{R}$ una función acotada, definimos la suma de Riemann, S_n, como

$$S_n = \sum_{i,j=0}^{n-1} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

donde (x_{ij}^*, y_{ij}^*) es cualquiera en R_{ij}.

- Si la sucesión S_n converge a un límite S, y el límite S es el mismo para cualquier selección de puntos (x_{ij}^*, y_{ij}^*) en los rectángulos R_{ij}, entonces decimos que f es integrable sobre R $(\lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=0}^{n-1} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A = \int\int_R f dA)$.

¿Qué funciones son integrables?

Respuesta:

Funciones continuas.

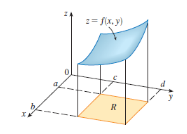
Funciones continuas salvo un número finito de curvas suaves.

Observación: Como el punto muestral (x_{ij}^*, y_{ij}^*) puede ser cualquiera, en particular puedo elegir en cada rectángulo la esquina (x_{ij}, y_{ij}). Luego, $\iint_R f dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=0}^{n-1} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A$.

Observación:

Si $f(x, y) \geq 0$, entonces el volumen V del sólido que yace arriba del rectángulo R y debajo de la superficie $z = f(x, y)$ es

$$V = \iint_R f dA.$$



La integral es lineal:

$$\iint_R (f_1 + f_2)dA = \iint_R f_1 dA + \iint_R f_2 dA.$$

$$\iint_R \alpha f dA = \alpha \iint_R f dA,$$

donde α es una constante.
La integral es Monótona:
Si $f(x, y) \geq g(x, y)$ para todo $(x, y) \in R$, entonces

$$\iint_R f dA \geq \iint_R g dA.$$

Regla del punto medio para integrales dobles

$$\iint_R f dA \approx \sum_i^{n-1} \sum_j^{n-1} f(\overline{x_i}, \overline{y_j}) \Delta A$$

donde $\overline{x_i}$ es el punto medio de $[x_{i+1} - x_i]$ e $\overline{y_j}$ es el punto medio de $[y_{j+1} - y_j]$.

Valor promedio

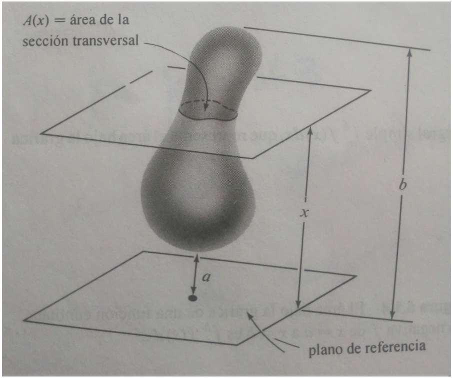
En Cálculo I, si f esta definida en el $[a, b]$ se define f_{prom} de la siguiente forma:

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f \, dx.$$

Podemos extender esto a varias variables de la siguiente forma:

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f \, dA.$$

Principio de Cavalieri

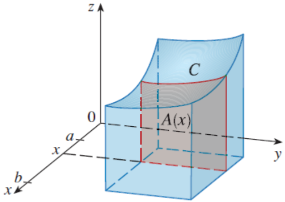


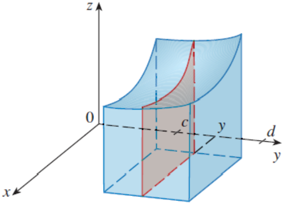
$$V = \int_a^b A(x)dx.$$

Integrales iteradas

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx.$$

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d A(y)dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy.$$





Ejemplo

Calcular la siguiente integral $\int_0^1 \int_0^1 x^2 e^y \, dx \, dy$.

$$\int_0^1 \int_0^1 x^2 e^y \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 x^2 e^y \, dx \right) dy = \int_0^1 e^y \left(\left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 \right) dy$$

$$= \int_0^1 e^y \frac{1}{3} \, dy = \frac{1}{3} e^y \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(e-1).$$

Calculemos ahora $\int_0^1 \int_0^1 x^2 e^y \, dy \, dx$.

$$\int_0^1 \int_0^1 x^2 e^y \, dy \, dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 x^2 e^y \, dy \right) dx = \int_0^1 e^y \Big|_0^1 x^2 \, dx$$

$$= \int_0^1 (e-1) x^2 \, dy = (e-1) \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}(e-1).$$

Teorema de Fubini

¿Podemos afirmar que coinciden las integrales iteradas? Respuesta: en muchos casos sí, y lo demuestra el Teorema de Fubini.

Teorema de Fubini

Sea f una función continua con dominio $R = [a, b] \times [c, d]$. Entonces

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dydx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dxdy = \iint_R f(x, y) dA.$$

Observación:

La versión más general del teorema de Fubini vale para una f tal que: es acotada en R, es discontinua sólo en un número finito de curvas y las integrales iteradas existen.

Ejemplo :Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2, pruebe que: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ utilizando el Teorema de Fubini. Sea $g(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ y $R = [a, b] \times [c, d]$ con a, b, c y d arbitrarios

$$
\begin{aligned}
\iint_R g(x, y) dA &= \int_a^b \int_c^d \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) dydx \\
&= \int_a^b \int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dydx - \int_a^b \int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dydx \\
&= \int_c^d \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy - \int_a^b \int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dydx \\
&= \int_c^d \frac{\partial f}{\partial y} |_a^b dy - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x} |_c^d dx \\
&= \int_c^d \frac{\partial f(b, y)}{\partial y} - \frac{\partial f(a, y)}{\partial y} dy - \int_a^b \frac{\partial f(x, d)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, c)}{\partial x} dx \\
&= f(b, y)|_c^d - f(a, y)|_c^d - f(x, d)|_a^b + f(x, c)|_a^b \\
&= f(b, d) - f(b, c) - f(a, d) + f(a, c) - f(b, d) + f(a, d) + f(b, c) - f(a, c) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Suponemos que g no es idénticamente 0 en R.
Entonces (sin pérdida de generalidad) existe un (x_0, y_0) en R tal que $g(x_0, y_0) = a > 0$.
Luego existe $R' \subset R$ tal que $(x_0, y_0) \in R'$ y $g(x, y) > \frac{a}{2}$ para todo $(x, y) \in R'$.
Luego $\iint_{R'} g(x, y) dA \geq \frac{a}{2} A(R') > 0$, y esto es una contradicción.

Ejercicio

Sea f continua en $[a, b]$ y g continua en $[c, d]$. Mostrar que

$$\iint_R [f(x)g(y)]dxdy = \left[\int_a^b f(x)dx\right]\left[\int_c^d g(y)dy\right],$$

donde $R = [a, b] \times [c, d]$.

Comentario

Este ejercicio junto con el teorema de cambio de variable, nos permite probar

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Definición

Sea D una región elemental del plano, tomamos R un rectángulo que contenga D, dada $f : D \mapsto \mathbb{R}$, donde f es continua, extendemos f a una función F definida en todo R de la siguiente forma

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si} \quad (x,y) \in D \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \notin D \text{ y } (x,y) \in R \end{cases}$$

entonces

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_R F(x,y)dA.$$

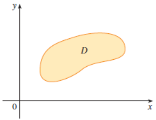


FIGURA 1

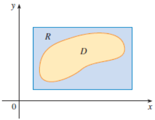
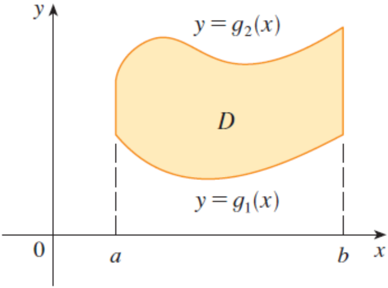


FIGURA 2

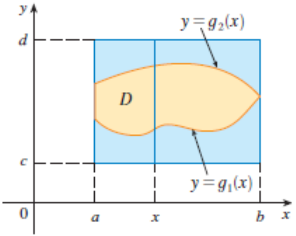
Definición (Región del tipo 1)

Supongamos que se tienen dos funciones continuas con valores reales, $g_1 : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ y $g_2 : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ que satisfacen $g_1(x) \leq g_2(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Sea D el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $x \in [a, b]$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$. Se dice que esta región D es de **tipo 1**.



Sea D el conjunto de puntos (x, y) tales que $x \in [a, b]$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$. Entonces,

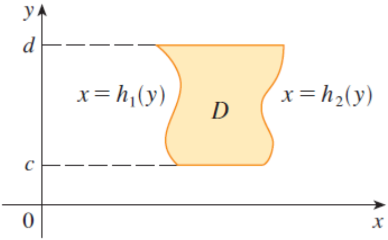
$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_R F(x,y)dydx$$
$$= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x,y)dydx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx.$$



Observación: La definición no depende del rectángulo elegido.

Definición (Región del tipo II)

Supongamos que se tienen dos funciones continuas con valores reales, $h_1 : [c, d] \mapsto \mathbb{R}$ y $h_2 : [c, d] \mapsto \mathbb{R}$ que satisfacen $h_1(y) \leq h_2(y)$, para todo $y \in [c, d]$. Sea D el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $y \in [c, d]$ y $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$. Se dice que esta región D es de **tipo 2**.

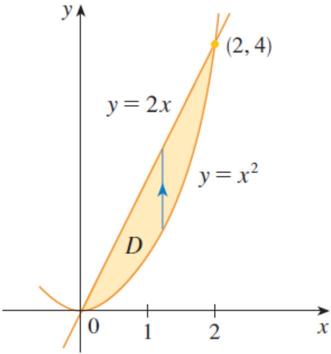


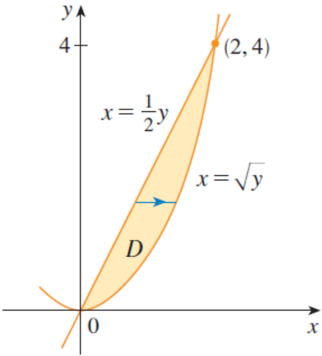
Sea D el conjunto de puntos (x, y) tales que $y \in [c, d]$ y $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)dA &= \iint_R F(x,y)dxdy \\ &= \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} F(x,y)dxdy = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy\end{aligned}$$

Definición

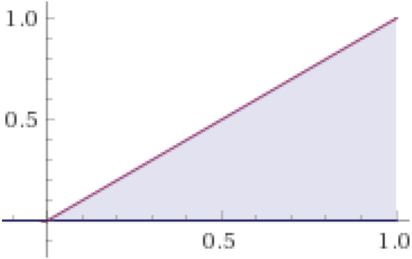
Una región es de **tipo 3** si es de tipo 1 y tipo 2.





Ejemplo

Calcular $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dxdy$. Observemos que la región de integración es un triángulo, pues $y \leq x \leq 1$, mientras que $0 \leq y \leq 1$.



Entonces, usando Fubini tenemos

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dxdy = \int_T e^{x^2} dA = \int_0^1 \int_0^x e^{x^2} dydx$$
$$= \int_0^y e^{x^2} y|_0^x dx = \int_0^1 e^{x^2} xdx = \frac{1}{2} e^{x^2}|_0^1 = \frac{1}{2}(e-1).$$

Propiedades

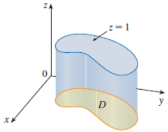
- $\iint_D (f_1 + f_2)dA = \iint_D f_1 dA + \iint_D f_2 dA.$
- $\iint_D \alpha f dA = \alpha \iint_D f dA$, donde α es una constante.
- Si $f(x, y) \geq g(x, y)$ para todo $(x, y) \in D$, entonces

$$\iint_D f dA \geq \iint_D g dA.$$

- Si $D = D_1 \cup D_2$ y además D_1 y D_2 sólo se tocan a lo sumo en el borde, entonces

$$\iint_D f dA = \iint_{D_1} f dA + \iint_{D_2} f dA.$$

Ejemplo: Calcular el volumen de un cilindro de base D y altura 1, como muestra el dibujo



$$\iint_D 1 dA = 1.A(D) = A(D).$$

Observación: Obtuvimos una fórmula para calcular el area.

Ejercicio:

Pruebe que si $m \leq f(x, y) \leq M$ para todo $(x, y) \in D$, entonces

$$mA(D) \leq \iint_D f(x, y) dA \leq MA(D).$$