UNIDAD 2

DIFERENCIACIÓN EN DOS O MÁS VARIABLES

Libro de referencia principal:

Cálculo de varias variables
(7ma Edición)

Autor:

James Stewart

Plataforma virtual del curso: https://calculo2-unsl-1c2019.weebly.com

EXTREMOS RESTRINGIDOS: Un ejemplo aplicado

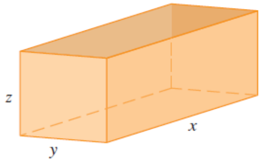
En muchas aplicaciones, resulta necesario calcular los máximos y mínimos de una función restringiendo sus variables independientes de determinada manera. *Consideremos el siguiente ejemplo...*

EJEMPLO [p. 950]**:** Supongamos que disponemos de 12 m^2 de cartón y queremos utilizarlo para fabricar una caja rectangular sin tapa con el máximo volumen posible. ¿Qué dimensiones debe tener la caja para cumplir nuestro objetivo?

Solución:

Sean x, y y z la longitud, el ancho y la altura de la caja en metros, según se muestra en la figura 10. Entonces, el volumen de la caja es

$$V = xyz$$



Expresamos V como una función de sólo dos variables x y y recurriendo al hecho de que el área de los cuatro lados y el fondo de la caja es

$$2xz + 2yz + xy = 12$$

Al resolver la ecuación para z, obtenemos $z = (12 - xy)/[2(x + y)]$, de modo que la expresión para V se transforma en

$$V = xy\,\frac{12 - xy}{2(x + y)} = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x + y)}$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x + y)^2} \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x + y)^2}$$

Si V es un máximo, entonces $\partial V/\partial x = \partial V/\partial y = 0$, pero $x = 0$ o $y = 0$ da $V = 0$, de modo que debemos resolver las ecuaciones

$$12 - 2xy - x^2 = 0 \qquad 12 - 2xy - y^2 = 0$$

Esto implica que $x^2 = y^2$ y $x = y$. (Note que x y y ambas deben ser positivas en este problema.) Si hacemos $x = y$ en cualquier ecuación obtenemos $12 - 3x^2 = 0$, lo cual da $x = 2$, $y = 2$ y $z = (12 - 2 \cdot 2)/[2(2 + 2)] = 1$.

Podríamos utilizar la prueba de la segunda derivada para demostrar que esto da un máximo local de V, o bien, podríamos argumentar simplemente que por la naturaleza física de este problema debe haber un volumen máximo absoluto, lo cual tiene que ocurrir en un punto crítico de V, de modo que se debe presentar cuando $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$. Entonces $V = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$, de modo que el volumen máximo de la caja es 4 m^3. ■

Algunas consideraciones...

- Aplicar la prueba de la segunda derivada en el ejemplo anterior sería algo complicado, debido a la dificultad que implica, en este caso particular, calcular las derivadas parciales y los puntos críticos correspondientes.
- Otra desventaja de la prueba de la segunda derivada es que, en algunos problemas similares a este, resulta imposible despejar una variable (para expresar la función de interés sólo en términos de las otras dos variables).

A continuación aprenderemos un método que nos permitirá maximizar o minimizar una función cuyas variables independientes están sujetas a una restricción o condición secundaria.

Teorema (DE LAGRANGE)

Sean $f(x,y)$ y $g(x,y)$ dos funciones con primeras derivadas parciales continuas. Supongamos, además, que f alcanza un valor máximo o un valor mínimo, $f(x_0,y_0)$, cuando el punto variable (x,y) está sujeto a la restricción $g(x,y)=0$ (es decir, cuando se consideran sólo los puntos del dominio de f que satisfacen esta ecuación). Entonces, si $\nabla g(x_0,y_0) \neq \mathbf{0}$, existe un número real λ tal que

$$\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0)$$

Nota: La demostración formal rigurosa de este teorema se omitirá en este curso (el alumno interesado puede encontrarla en la pág. 853 del libro complementario de E. W. SWOKOWSKI). No obstante, resulta interesante esbozarla mediante su fundamento geométrico... *Sugerencia*: Leer dicho fundamento en la pág. 957 del libro de cabecera del curso.

El número λ que aparece en el teorema anterior se llama **multiplicador de Lagrange.**

Observación: El teorema de Lagrange proporciona un método alternativo para resolver problemas del estilo del considerado en el ejemplo anterior...

Método de los multiplicadores de Lagrange

Para determinar los valores máximos y mínimos de $f(x, y)$ sujeta a la restricción $g(x, y) = k$ (*suponiendo que satisfagan las hipótesis del Teorema de Lagrange*) se puede proceder como sigue:

1° Se determinan todos los valores de x, y y λ tales que

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \text{ y } g(x, y) = k,$$

es decir, se resuelve el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) = k \end{cases}$$

2° Se evalúa f en todos los puntos (x, y) que resulten del paso anterior.

- El mayor de estos valores es el *máximo* buscado.
- El menor de estos valores es el *mínimo* buscado.

Nota: En algunos casos no es necesario determinar los valores explícitos de λ.

En el recuadro anterior se describe el método de los multiplicadores de Lagrange para el caso en que f es una función de dos variables. Para funciones de tres variables dicho método es completamente análogo y se ejemplifica a continuación...

EJEMPLO [p. 959]**:** *Consideremos nuevamente el problema del ejemplo anterior, esto es*: Supongamos que con 12 m^2 de cartón queremos fabricar una caja rectangular sin tapa con el máximo volumen posible. ¿Qué dimensiones debe tener la caja para cumplir nuestro objetivo?

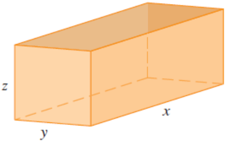
Solución mediante el método de los multiplicadores de Lagrange:

Al igual que en el ejemplo 6 de la sección 14.7, sean x, y y z el largo, el ancho y la altura, respectivamente, de la caja medidos en metros.
Buscamos maximizar

$$V = xyz$$

sujeta a la restricción

$$g(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy = 12$$



Utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange, buscamos valores de x, y, z y λ tales que $\nabla V = \lambda \nabla g$ y $g(x, y, z) = 12$. De aquí obtenemos las ecuaciones

$$V_x = \lambda g_x$$

$$V_y = \lambda g_y$$

$$V_z = \lambda g_z$$

$$2xz + 2yz + xy = 12$$

las cuales se transforman en

$$yz = \lambda(2z + y) \tag{2}$$

$$xz = \lambda(2z + x) \tag{3}$$

$$xy = \lambda(2x + 2y) \tag{4}$$

$$2xz + 2yz + xy = 12 \tag{5}$$

No hay reglas generales para resolver sistemas de ecuaciones. Algunas veces se requiere ingenio. En el presente ejemplo, se ve que si multiplicamos $\boxed{2}$ por x, $\boxed{3}$ por y, y $\boxed{4}$ por z, entonces los primeros miembros de estas ecuaciones son idénticos. Al hacerlo tenemos

$\boxed{6}$ $$xyz = \lambda(2xz + xy)$$

$\boxed{7}$ $$xyz = \lambda(2yz + xy)$$

$\boxed{8}$ $$xyz = \lambda(2xz + 2yz)$$

Observe que $\lambda \neq 0$ porque $\lambda = 0$ implicaría que $yz = xz = xy = 0$ de acuerdo con $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ y $\boxed{4}$ y esto contradice $\boxed{5}$. Por lo tanto, de $\boxed{6}$ y $\boxed{7}$, tenemos

$$2xz + xy = 2yz + xy$$

lo cual da $xz = yz$. Pero $z \neq 0$ (ya que $z = 0$ daría $V = 0$), de modo que $x = y$. De acuerdo con $\boxed{7}$ y $\boxed{8}$ tenemos

$$2yz + xy = 2xz + 2yz$$

lo cual da $2xz = xy$ y de este modo (como $x \neq 0$) $y = 2z$. Si hacemos $x = y = 2z$ en $\boxed{5}$, obtenemos

$$4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 12$$

Puesto que x, y y z son positivas, se tiene que $z = 1$ y por lo tanto $x = 2$ y $y = 2$. Esto concuerda con la respuesta de la sección 14.7.

EJERCICIO: Leer con especial atención el EJEMPLO 2 y el EJEMPLO 3 del libro de cabecera del curso [p. 960]. Estos ejemplos muestran un caso donde resulta apropiado combinar dos métodos.

Fundamento geométrico del método de Lagrange (para funciones de dos variables)

Supongamos que se quieren obtener los valores extremos de la función real de dos variables $f(x, y)$ sujeta a una restricción de la forma $g(x, y) = k$.

Algunas consideraciones...

- $g(x, y)$ es también una función real de dos variables, por lo que la ecuación $g(x, y) = k$ representa una curva de nivel de g.

- Interesa, entonces, encontar los valores extremos de $f(x, y)$ cuando el punto variable (x, y) está condicionado a quedar en la curva de nivel de $g(x, y) = k$.

Supongamos que se quieren obtener los valores extremos de la función real de dos variables $f(x, y)$ sujeta a una restricción de la forma

$$g(x, y) = k.$$

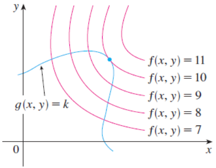
Si, por ejemplo, el valor más alto (**máximo**) de f sobre dicha curva se alcanza en un punto (x_0, y_0) y es igual a c [esto es, $c = f(x_0, y_0)$], tiene sentido considerar la curva de nivel $f(x, y) = c$.

Observaciones importantes:

- (x_0, y_0) se encuentra en la curva de nivel de $g(x, y) = k$ (pues genera el máximo valor de f sobre esta).
- (x_0, y_0) se encuentra también en la curva de nivel $f(x, y) = c$ (ya que $f(x_0, y_0) = c$).

Por lo tanto: (x_0, y_0) es un punto de intersección entre ambas curvas...

Maximizar $f(x, y)$ sujeta a la restricción $g(x, y) = k$ es encontrar el valor más grande de c para el cual la curva de nivel de f correspondiente $[f(x, y) = c]$ se corte con la curva $g(x, y) = k$ (en el plano xy).



Como sugiere la figura, esto parece suceder cuando ambas curvas se tocan "apenas"... es decir, donde tienen una recta tangente común. (De lo contario, el valor de c podría incrementarse aún más).

Recordemos...

- En el plano xy, se dice que una recta (o un vector) es perpendicular a una curva C en el punto (x_0, y_0) de C cuando es perpendicular a la recta (o al vector) tangente a dicha curva en (x_0, y_0).
- El vector $\nabla f\,(x_0, y_0)$ es perpendicular en el punto (x_0, y_0) a la curva de nivel (de f) "que toca", es decir, a la curva de ecuación $f\,(x, y) = c = f\,(x_0, y_0)$.
- Del mismo modo, el vector $\nabla g\,(x_0, y_0)$ es perpendicular en el punto (x_0, y_0) a la curva de nivel (de g) "que toca", es decir, a la curva de ecuación $g\,(x, y) = k$.

Entonces, dado que los vectores $\nabla f\,(x_0, y_0)$ y $\nabla g\,(x_0, y_0)$ son ambos perpendiculares a la misma recta tangente, resultan paralelos entre sí... Por lo tanto, si son vectores no nulos, existe un escalar $\lambda \neq 0$ tal que $\nabla f\,(x_0, y_0) = \lambda \nabla g\,(x_0, y_0)$ ■