UNIDAD 2

DIFERENCIACIÓN EN DOS O MÁS VARIABLES

Libro de referencia principal:

Cálculo de varias variables
(7ma Edición)

Autor:

James Stewart

Plataforma virtual del curso: https://calculo2-unsl-1c2019.weebly.com

VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS: Introducción

Recordemos... En CÁLCULO I / ANÁLISIS MATEMÁTICO I se aprende que una de las principales aplicaciones de las derivadas ordinarias radica en hallar los valores extremos (máximos y mínimos) de funciones reales de una variable real.

A continuación veremos que, *análogamente*, una de las principales aplicaciones de las derivadas parciales consiste en localizar los **valores extremos** de funciones reales de varias variables.

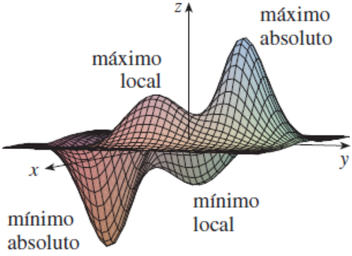


Ilustración de máximos y mínimos en funciones de dos variables

VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS: Definiciones básicas

Definición (valores máximos y mínimos locales)

Sea f una función real de las variables reales x e y. Sea (a, b) un punto en dom (f). Se dice que...

- *f tiene un máximo local en (a, b) si existe algún disco abierto $D \subseteq$ dom (f) con centro en (a, b) tal que*

$$f(a, b) \geq f(x, y) \text{ para todo punto } (x, y) \in D.$$

Al número $f(a, b)$ se le llama **valor máximo local** *de f.*

- *f tiene un mínimo local en (a, b) si existe algún disco abierto $D \subseteq$ dom (f) con centro en (a, b) tal que*

$$f(a, b) \leq f(x, y) \text{ para todo punto } (x, y) \in D.$$

Al número $f(a, b)$ se le llama **valor mínimo local** *de f.*

VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS: Definiciones básicas

Definición (valores máximo y mínimo absolutos)

Sea f una función real de las variables reales x e y. Sea (a,b) un punto en $dom\,(f)$. Se dice que...

- *f tiene un máximo absoluto en (a,b) si:*

$$f\,(a,b) \geq f\,(x,y) \;\; \text{para todo punto} \;\; (x,y) \in dom\,(f)\,.$$

Al número $f\,(a,b)$ se le llama **valor máximo absoluto** *de f.*

- *f tiene un mínimo absoluto en (a,b) si:*

$$f\,(a,b) \leq f\,(x,y) \;\; \text{para todo punto} \;\; (x,y) \in \; dom\,(f)\,.$$

Al número $f\,(a,b)$ se le llama **valor mínimo absoluto** *de f.*

VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS: Definiciones básicas

Observaciones:

- No todo (valor) extremo local de f es un (valor) extremo absoluto.
- Cuando el dominio de f es un conjunto abierto, los extremos absolutos, de existir, ocurren en puntos donde f tiene extremos relativos. Cuando el dominio de f no es un conjunto abierto, esto no se puede garantizar.

Además, se dice que...

- ▶ f *tiene un extremo local en el* punto (a, b) *si tiene un máximo local o un mínimo local en* (a, b). *En este caso, se hace referencia al* número $f(a, b)$ *como* **valor extremo local** *de* f.
- ▶ f *tiene un extremo absoluto en el* punto (a, b) *si tiene un máximo absoluto o un mínimo absoluto en* (a, b). *En este caso, se hace referencia al* número $f(a, b)$ *como* **valor extremo absoluto** *de* f.
- ▶ f *tiene un extremo en el punto* (a, b) *si tiene un extremo local o un extremo absoluto en* (a, b). *Al hacer referencia simplemente a los* **valores extremos** *de* f *se incluye tanto a los valores extremos locales como a los valores extremos absolutos de* f *(si los hubiera).*

VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS: Puntos críticos

Teorema

Si la función real de dos variables $f(x, y)$ tiene un extremo local en (a, b) y sus derivadas parciales de primer orden existen en dicho punto, entonces $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$.

DEMOSTRACIÓN Sea $g(x) = f(x, b)$. Si f tiene un máximo local o un mínimo local en (a, b), entonces g tiene un máximo local o un mínimo local en a, así que $g'(a) = 0$ según el teorema de Fermat (véase teorema 4.1.4). Pero $g'(a) = f_x(a, b)$ (véase ecuación 14.3.1) de modo que $f_x(a, b) = 0$. De igual manera, al aplicar el teorema de Fermat a la función $G(y) = f(a, y)$, obtenemos $f_y(a, b) = 0$.

Notas y complementos de la demostración anterior:

- El *teorema de Fermat* es el resultado análogo a este para funciones reales de una variable.
- $g'(a) \overset{\text{def.}g'}{=} \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} \overset{\text{def.}g}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \overset{\text{def.}f_x}{=} f_x(a, b)$

VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS: Puntos críticos

Recordemos... Si la función $f(x, y)$ tiene primeras derivadas parciales continuas en (a, b), entonces el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(a, b, f(a, b))$ existe y tiene ecuación

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Observemos... En tal caso, si f tiene un extremo local en (a, b), la ecuación de dicho plano tangente toma la forma

$$z = f(a, b)$$

Tenemos, entonces, lo siguiente...

Interpretación geométrica del teorema anterior: Si la gráfica de f tiene un plano tangente en un máximo local o en un mínimo local, este debe ser horizontal.

VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS: Puntos críticos

Como en el caso de las funciones de una variable, los máximos y mínimos locales se pueden alcanzar también en puntos del dominio de f en los que f_x y/o f_y no existen. Como esta clase de puntos y los considerados en el teorema anterior son importantes para encontrar los extremos locales, reciben un nombre especial...

Definición (puntos críticos)

Sea f una función real de las variables reales x e y. Un punto (a, b) en dom(f) se llama **punto crítico** *(o* **punto estacionario***) de f si*

- $f_x(a, b) = 0$ **y** $f_y(a, b) = 0$

o bien,

- $f_x(a, b)$ *no existe* **o** $f_y(a, b)$ *no existe.*

Observaciones:

1. Todos los puntos en los que f tiene un extremo local son críticos.
2. No en todos los puntos críticos de f se alcanza un extremo local.

EJEMPLO [p. 946]**:** Hallar, si existen, los valores máximo y mínimo de

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$$

Solución:

$$f_x(x, y) = 2x - 2 \qquad f_y(x, y) = 2y - 6$$

Estas derivadas parciales son iguales a 0 cuando $x = 1$ y $y = 3$, de modo que el único punto crítico es $(1, 3)$. Al completar el cuadrado, se encuentra que

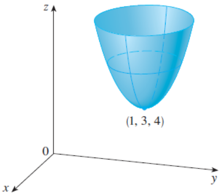
$$f(x, y) = 4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2$$

Puesto que $(x - 1)^2 \geqslant 0$ y $(y - 3)^2 \geqslant 0$, tenemos que $f(x, y) \geqslant 4$ para todos los valores de x y y. Por lo tanto, $f(1, 3) = 4$ es un mínimo local y, de hecho, es el mínimo absoluto de f.

Notas y complementos sobre este ejemplo:

f es una función polinómica de dos variables, por lo tanto, *sabemos que...*

- $dom\,(f) = \mathbb{R}^2$ (un conjunto abierto) y así, de alcanzar valores extremos, estos ocurrirán entre sus puntos críticos.
- sus derivadas parciales existen en todos los puntos del dominio, lo que nos garantiza que $(1, 3)$ es su único punto crítico.



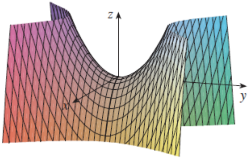
EJEMPLO [p. 947]**:** Hallar, si existen, los valores extremos de

$$f(x, y) = y^2 - x^2$$

Solución:

Puesto que, $f_x = -2x$ y $f_y = 2y$, el único punto crítico es $(0, 0)$. Observe que para los puntos en el eje x, $y = 0$, de modo que $f(x, y) = -x^2 < 0$ (si $x \neq 0$). No obstante, para puntos en el eje y, $x = 0$, de modo que $f(x, y) = y^2 > 0$ (si $y \neq 0$). Por lo tanto, todo disco con centro en $(0, 0)$ contiene puntos donde f toma valores positivos, así como puntos donde f toma valores negativos. Por lo tanto, $f(0, 0) = 0$ no puede ser un valor extremo de f, de modo que f no tiene valor extremo.

Notas y complementos sobre este ejemplo:
Nuevamente, f es una función polinómica de dos variables, por lo tanto, valen las mismas aclaraciones realizadas para el ejemplo anterior.



Observación: Este último ejemplo ilustra el hecho (ya mencionado) de que no en todos los puntos críticos de una función se alcanza un valor extremo.

Un punto crítico de una función f en el que **no** se alcanza un valor extremo local (ni absoluto) se llama **punto silla** de f.

El siguiente teorema proporciona un criterio preciso para determinar (en cierta clase de funciones) si en un punto crítico se alcanza o no un valor extremo local y, en caso afirmativo, de qué tipo (máximo o mínimo).

Teorema (Prueba de la segunda derivada)

Sea f una función real de las variables x e y. Sea (a, b) un punto en el que ambas derivadas parciales de f existen y se anulan (es decir, $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$). Supongamos, además, que las segundas derivadas parciales de f son continuas sobre un disco abierto con centro (a, b). Finalmente, sea

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

Entonces:

a) *Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, $f(a, b)$ es un (valor)* **mínimo local** *de f.*

b) *Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, $f(a, b)$ es un (valor)* **máximo local** *de f.*

c) *Si $D < 0$, $f(a, b)$* **no** *es un (valor)* **extremo local** *de f.*

DEMOSTRACIÓN El alumno interesado puede encontrar la demostración de la parte a) al final de la sección 14.7 [p. 953]. Las de b) y c) son similares ■

VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS: Puntos críticos

Observaciones (relativas al teorema anterior)**:**

- En el caso c), el punto (a, b) es un punto silla de f.

- Si $D = 0$, la prueba no proporciona información: f podria tener un máximo local, un mínimo local, o bien, un punto silla en (a, b).

- Bajo las hipótesis establecidas para f, no hay puntos críticos en los que alguna de las derivadas parciales no existe.

EJEMPLO [p. 947]**:** Hallar, si existen, los valores extremos locales y los puntos silla de

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

Solución:

Primero localizamos los puntos críticos:

$$f_x = 4x^3 - 4y \qquad f_y = 4y^3 - 4x$$

Al igualar a estas derivadas parciales con 0, se obtienen las ecuaciones

$$x^3 - y = 0 \qquad \text{y} \qquad y^3 - x = 0$$

Para resolver estas ecuaciones, sustituimos $y = x^3$ de la primera ecuación en la segunda y obtenemos

$$0 = x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$$

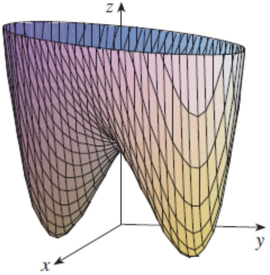
de modo que hay tres raíces reales: $x = 0, 1, -1$. Los tres puntos críticos son $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(-1, -1)$.

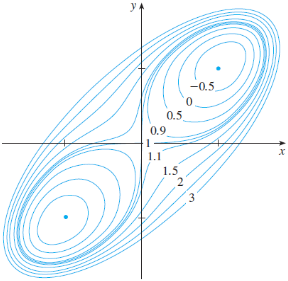
Luego calculamos la segunda derivada parcial y $D(x, y)$:

$$f_{xx} = 12x^2 \qquad f_{xy} = -4 \qquad f_{yy} = 12y^2$$

$$D(x, y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 144x^2y^2 - 16$$

Puesto que $D(0, 0) = -16 < 0$, se infiere del caso c) de la prueba de la segunda derivada que el origen es un punto silla; es decir, f no tiene máximo ni mínimo local en $(0, 0)$. Como $D(1, 1) = 128 > 0$ y $f_{xx}(1, 1) = 12 > 0$, se ve que según el caso a) de la prueba que $f(1, 1) = -1$ es un mínimo local. De igual manera, $D(-1, -1) = 128 > 0$ y $f_{xx}(-1, -1) = 12 > 0$, de modo que $f(-1, -1) = -1$ es también un mínimo local.





En la figura 5 se ilustra el mapa de contorno de la función f del ejemplo 3. Las curvas de nivel cerca de $(1, 1)$ y de $(-1, -1)$ son de forma oval e indican que a medida que se aleja de $(1, 1)$ o $(-1, -1)$ en cualquier dirección, los valores de f son crecientes. Las curvas de nivel cerca de $(0, 0)$, por otra parte, se asemejan a hipérbolas y dejan ver que cuando se aleja del origen (donde el valor de f es 1), los valores de f decrecen en algunas direcciones pero crecen en otras. Por lo tanto, el mapa de contorno sugiere la presencia de los mínimos y del punto de silla que se encontró en el ejemplo 3.

Observación: Los mapas de contorno pueden servir para estimar la ubicación de los puntos críticos.