UNIDAD 2

DIFERENCIACIÓN EN DOS O MÁS VARIABLES

Libro de referencia principal:

Cálculo de varias variables
(7ma Edición)

Autor:

James Stewart

Plataforma virtual del curso: https://calculo2-unsl-1c2019.weebly.com

DERIVADAS DIRECCIONALES: Introducción

Consideremos una función de dos variables, $z = f(x, y)$, con dominio D.

Recordemos... Hemos definido las **derivadas parciales** de f como

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

y

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

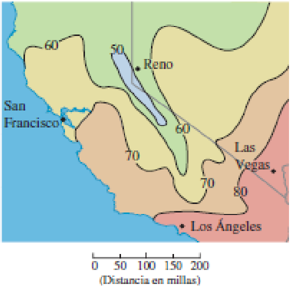
en cada punto (x_0, y_0) en D donde estos límites existen.

Además... Hemos interpretado estas derivadas como las *razones de cambio* o *tasas de variación* (instantáneas) de z (o de f) en (x_0, y_0) en las direcciones de los ejes x e y respectivamente, es decir, en las direcciones de los vectores unitarios

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$$

EJEMPLO [p. 933]**:** Supongamos que la función $T(x, y)$ representa la temperatura (en *grados Fahrenheit*) a las 3:00 PM de cierto día de octubre, para las diferentes localidades de los Estados de California y Nevada.

Consideremos el mapa climático correspondiente en la sig. figura:



Cada curva de nivel de $T(x, y)$ (*isoterma*) une localidades con la misma temperatura.

Nota: Las coordenadas x e y que representan a cada localidad dependerán de dónde se ubique el origen en nuetro mapa (y se miden en *millas*).

Si denotamos por (x_0, y_0) al punto que representa (por ejemplo) a Reno, entonces:

- $T_x(x_0, y_0)$ nos indica la *razón de cambio* de la temperatura con respecto a la distancia si emprendemos un viaje **hacia el este** de Reno.
- $T_y(x_0, y_0)$ nos indica la *razón de cambio* de la temperatura con respecto a la distancia si emprendemos un viaje **hacia el norte** de Reno.

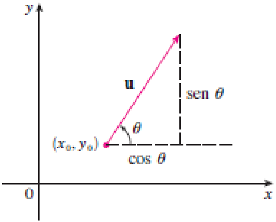
Pero... ¿Qué sucede si quisiéramos conocer dicha razón de cambio para emprender un viaje hacia Las Vegas, es decir, hacia el sureste de Reno?

A continuación estudiaremos una clase de derivadas (que incluye a las parciales) que permite calcular las razones de cambio de una función f en cualquier dirección: las **derivadas direccionales**.

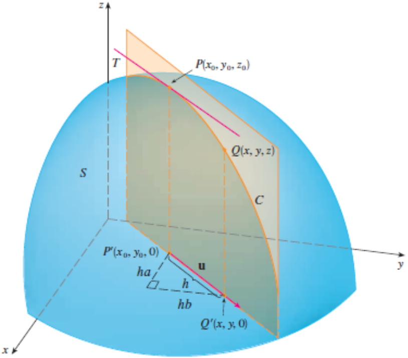
Sea $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ un vector unitario (con cualquier dirección).

Procederemos a definir las razones de cambio (media e instantánea) de $z = f(x, y)$ con respecto a la distancia en la dirección determinada por $\mathbf{u}$.

- Supongamos que $\mathbf{u}$ se representa en el plano con punto inicial $(x_0, y_0) \in dom(f)$.
- Su punto final tiene, entonces, coordenadas $(x_0 + a, y_0 + b)$.
- Además, sabemos que $a = \cos\theta$ y $b = \cos\theta$.



Sea S la superficie cuya ecuación es $z = f(x, y)$ y sea $z_0 = f(x_0, y_0)$.



Observaciones:

- El punto $P(x_0, y_0, z_0)$ está en S.
- El plano vertical paralelo a $\mathbf{u}$ que pasa por P corta a S en una curva C.

Sea T la recta tangente a C en el punto P.
Sea $Q(x, y, z)$ cualquier otro punto sobre C.

Si $P'(x_0, y_0, 0)$ y $Q'(x, y, 0)$ son las proyecciones de P y Q sobre el plano xy, el vector $\overrightarrow{P'Q'}$ resulta paralelo a $\mathbf{u}$ es decir, $\overrightarrow{P'Q'} = h\mathbf{u}$ para algún $h \in \mathbb{R}$.

Entonces:

$$\langle x - x_0, y - y_0 \rangle = \langle ha, hb \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = ha \\ y - y_0 = hb \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + ha \\ y = y_0 + hb \end{cases}$$

y $\left\| \overrightarrow{P'Q'} \right\| = |h| \, \|\mathbf{u}\| = |h| \cdot 1 = |h|$ (h es la distancia con signo de P a Q).

Luego, si la posición de un punto (en el dominio de f) varía de (x_0, y_0) a (x, y), entonces:

- El **cambio neto** (o **incremento**) correspondiente de la variable dependiente z (o de f) es

$$\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)$$

- La **razón de cambio media** (o **promedio**) de z (o de f) con respecto a la distancia es

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

  Nota: Este cociente también puede interpretarse como la pendiente de la recta secante entre los puntos P y Q de la curva C.

Por lo tanto, si se toma el límite del cociente anterior cuando la distancia h tiende a 0 se obtiene...

1. ... la **razón de cambio instantánea** de z (o de f) en (x_0, y_0) con respecto a la distancia, en la dirección de **u**.
2. ... la pendiente de la recta T.

Esto motiva la siguiente definición...

DERIVADAS DIRECCIONALES: Definición y cálculo

Definición (**derivadas direccionales**)

Sean $f(x, y)$ una función real de dos variables y (x_0, y_0) un punto en el dominio de f. Si $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ es cualquier vector unitario, la **derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección de $\mathbf{u}$** *es*

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

si este límite existe.

Nota: Si $\mathbf{v}$ es cualquier otro vector con la misma dirección que el vector unitario $\mathbf{u}$, también podemos decir que $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$ es la **derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección de $\mathbf{v}$**.

No obstante... la aplicación de la definición correspondiente requiere de un vector unitario.

Observación: Aplicando la definición anterior con el vector $\mathbf{u} = \mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ (en la dirección positiva del eje x) tenemos que

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{i}} f(x_0, y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h \cdot 1, y_0 + h \cdot 0) - f(x_0, y_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \\ &= f_x(x_0, y_0), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene recordando la definición de derivada parcial de f con respecto a x.

Procediendo análogamente, con $\mathbf{u} = \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$ resulta que

$$D_{\mathbf{j}} f(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0).$$

Por lo tanto:

Las derivadas parciales de f son casos particulares de sus derivadas direccionales.

Para obtener derivadas direccionales de una función que está representada mediante una fórmula explícita se puede...

- ...utilizar la definición anterior (*calcular el límite correspondiente*),

(o bien)

- ...utilizar el siguiente teorema (*cuando sus hipótesis lo permitan*).

Teorema (cálculo de derivadas direccionales)

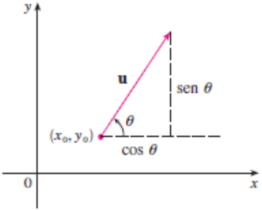
Si f es una función de las variables x e y que es diferenciable en el punto (x_0, y_0), entonces para cualquier vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ se satisface que

$$D_{\mathbf{u}} f\,(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b.$$

Observación:

Si el vector unitario $\mathbf{u}$ forma un ángulo θ con el semieje x positivo, entonces se puede escribir $\mathbf{u} = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta \rangle$ (*coordenadas polares*) y así, la fórmula del teorema anterior se transforma en

$$\boxed{D_{\mathbf{u}} f\,(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\cos\theta + f_y(x_0, y_0)\operatorname{sen}\theta}$$



DEMOSTRACIÓN Si definimos una función g de una variable h mediante

$$g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb)$$

entonces según la definición de la derivada

$$\boxed{4} \qquad g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$= D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$$

Por otro lado, podemos escribir $g(h) = f(x, y)$, donde $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$, de modo que la regla de la cadena (teorema 14.5.2) da

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dh} = f_x(x, y)\,a + f_y(x, y)\,b$$

Si ahora hacemos $h = 0$, entonces $x = x_0$, $y = y_0$, y

$$\boxed{5} \qquad g'(0) = f_x(x_0, y_0)\,a + f_y(x_0, y_0)\,b$$

Al comparar las ecuaciones 4 y 5, observe que

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\,a + f_y(x_0, y_0)\,b$$

EJEMPLO: Consideremos la función polinómica de dos variables

$$f(x, y) = x^3 y^2$$

Calcularemos la derivada direccional de f **en el punto** $(-1, 2)$ **en la dirección del vector** $\mathbf{v} = \langle 4, -3 \rangle$. En efecto, lo primero será obtener el vector unitario $\mathbf{u}$ con la misma dirección (y sentido) que $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} \langle 4, -3 \rangle = \frac{1}{5} \langle 4, -3 \rangle = \left\langle \frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \right\rangle$$

Luego, a fin de aplicar la fórmula provista por el teorema anterior, consideramos las derivadas parciales de f:

$$f_x(x, y) = 3x^2 y^2 \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = 2x^3 y$$

Finalmente, la derivada direccional que buscamos resulta:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(-1, 2) &= f_x(-1, 2) \cdot \frac{4}{5} + f_y(-1, 2) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \\ &= 12 \cdot \frac{4}{5} + (-4) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{48}{5} + \frac{12}{5} = \boxed{12} \end{aligned}$$

Ahora, interpretaremos el valor hallado anteriormente suponiendo que $f\,(x.y) = x^3y^2$ **da la temperatura (**en $^\circ C$) **en cada punto** (x, y)**.** En tal caso:

$$D_{\mathbf{u}}f\,(-1, 2) = 12$$

indica que si un punto "se mueve" desde $(-1, 2)$ en la dirección determinada por **u** (o por **v**) su temperatura *aumentará* a razón de $12^\circ C$ por unidad de distancia.

Ejercicio: Interpretar, bajo la misma suposición, los valores de $f_x\,(-1, 2)$ y $f_y\,(-1, 2)$ ■

Recomendaciones:

▶ Leer el EJEMPLO 1 de la p. 934: Muestra cómo se puede estimar el valor de la derivada direccional cuando no se cuenta con una fórmula explícita para la función de interés.

▶ Leer el EJEMPLO 2 de la p. 935: Ilustra la aplicación de la fórmula del teorema anterior con coordenadas polares.

Nota: Como hemos visto, el teorema anterior proporciona una fórmula que permite calcular, en cualquier punto en el que una función es diferenciable, todas sus derivadas direccionales, quedando establecida (indirectamente) la **existencia** de las mismas.

El recíproco de esta implicación no es válido. Es decir, aún cuando existan las derivadas en todas las direcciones, no se puede garantizar la diferenciabilidad.

Por ejemplo: La función f dada a continuación admite derivada direccional en $(0,0)$ para toda dirección y, sin embargo, no es diferenciable en $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Observación: La fórmula establecida en el teorema anterior se puede expresar también como el producto escalar de dos vectores:

$$D_{\mathbf{u}}f\,(x_0, y_0) = \langle f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)\rangle \cdot \langle a, b\rangle$$

El primer vector en el producto anterior es muy importante, dado que surge en numerosos contextos y aplicaciones, por lo que recibe un nombre y una notación especiales.

Definición (vector gradiente)

Sea f una función de las variables x e y. El **gradiente** *de f, denotado por ∇f (se lee "nabla f"), es la función vectorial de dos variables dada por*

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y)\rangle$$

EJEMPLO: Nuevamente, consideremos la función $f\,(x, y) = x^3y^2$ y el vector unitario $\mathbf{u} = \left\langle \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right\rangle$ (del ejemplo anterior). Entonces:

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y)\rangle = \left\langle 3x^2y^2, 2x^3y\right\rangle$$

$$\nabla f\,(-1, 2) = \langle f_x\,(-1, 2)\,, f_y\,(-1, 2)\rangle = \langle 12, -4\rangle$$

$$D_{\mathbf{u}}f\,(-1, 2) = \nabla f(-1, 2)\cdot \mathbf{u} = 12\cdot \tfrac{4}{5} + (-4)\cdot\left(-\tfrac{3}{5}\right) = \tfrac{48}{5} + \tfrac{12}{5} = 12$$

La teoría desarrollada en esta clase se puede generalizar en forma completamente análoga para funciones de tres o más variables. Leer la generalización de las definiciones principales para el caso de tres variables en las p. 937 y 938.

DERIVADAS DIRECCIONALES: Maximización

Dada una función f de dos (o tres) variables, un vector unitario $\mathbf{u}$ y y un punto $\mathbf{x}_0 \in \text{dom}(f)$, la derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f\,(\mathbf{x}_0)$, si existe, da (como vimos antes) la razón a la que cambia f en $\mathbf{x}_0$ en la dirección determinada por $\mathbf{u}$. Dicha derivada puede ser:

- *positiva* (f aumenta en la dirección de $\mathbf{u}$, en un entorno de $\mathbf{x}_0$),
- *negativa* (f disminuye en la dirección de $\mathbf{u}$,en un entorno de $\mathbf{x}_0$),
- *cero* (no existe, en esa dirección, un entorno de $\mathbf{x}_0$ en el que f sea creciente o decreciente).

Consideremos ahora todos los vectores unitarios en cuya dirección existe la derivada direccional de f en $\mathbf{x}_0$. Cabe plantearnos las siguientes preguntas:

1. ¿En cuál de estas direcciones f cambia más rápido (en $\mathbf{x}_0$)?
2. ¿Cuál es la máxima razón de cambio (en $\mathbf{x}_0$)?

Ambas respuestas se encuentran en el siguiente teorema...

Teorema (**del gradiente**)

Sea f una función de dos (o tres) variables que es diferenciable en el punto $\mathbf{x}_0$.

(i) *La* **mayor razón** *(o* **tasa***)* **de crecimiento de** f **en** $\mathbf{x}_0$*, es decir, el valor máximo de* $D_{\mathbf{u}}f\left(\mathbf{x}_0\right)$*, se alcanza cuando* $\mathbf{u}$ *es el vector unitario con la misma dirección que* $\nabla f(\mathbf{x}_0)$*, y es igual a* $\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|$*.*

(ii) *La* **mayor razón** *(o* **tasa***)* **de decrecimiento de** f **en** $\mathbf{x}_0$*, es decir, el valor mínimo de* $D_{\mathbf{u}}f\left(\mathbf{x}_0\right)$*, se alcanza cuando* $\mathbf{u}$ *es el vector unitario con la misma dirección que* $-\nabla f(\mathbf{x}_0)$*, y es igual a* $-\left\|\nabla f\left(\mathbf{x}_0\right)\right\|$*.*

Demostración: Se sigue inmediatamente del hecho de que

$$D_{\mathbf{u}}f\left(\mathbf{x}_0\right) = \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{u} = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|\,\|\mathbf{u}\|\cos\theta = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|\cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre los vectores $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ y $\mathbf{u}$ [ver en la p. 939]■

Leer EJEMPLOS 6 y 7 (p. 939).