Plano tangente y Regla de la cadena

Analía Silva

Universidad Nacional de San Luis

2021

Repaso de cálculo I,

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Definición

Si f es una función de dos variables, sus derivadas parciales son las funciones f_x y f_y definidas por

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h},$$

$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}.$$

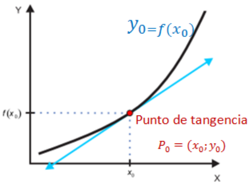
Algunas notaciones son: $f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$.
Ejemplo: Sea $f = x^2 + y^4 x$

$$f_x(x,y) = 2x + y^4$$

$$f_y(x,y) = 4y^3 x.$$

Repaso (Cálculo I)

SEA:

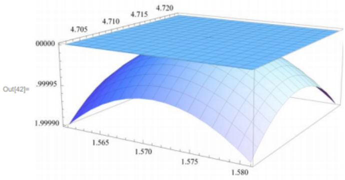


$$m = f'(x_0)$$

ECUACION RECTA TANGENTE:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Ahora, buscamos...



Ecuación de un plano

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

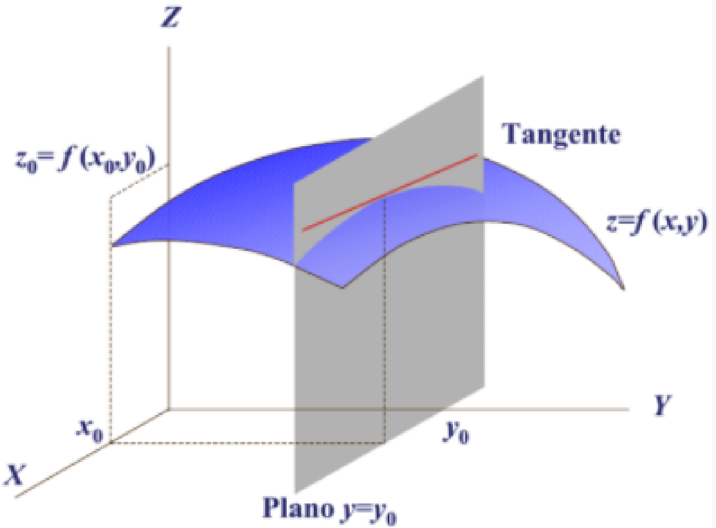
Depejemos z

$$\begin{aligned} A(x - x_0) + B(y - y_0) &= -C(z - z_0) \\ \frac{-A}{C}(x - x_0) + \frac{-B}{C}(y - y_0) &= z - z_0 \\ \frac{-A}{C}(x - x_0) + \frac{-B}{C}(y - y_0) + z_0 &= z \end{aligned}$$

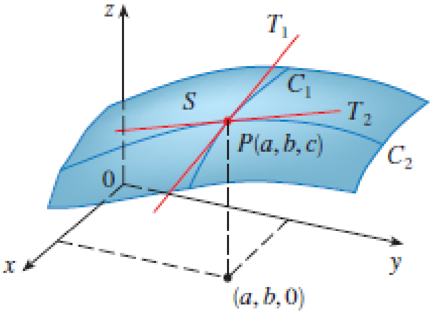
Si llamamos $a = \frac{-A}{C}$ y $b = \frac{-B}{C}$, nos queda

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + z_0 = z$$

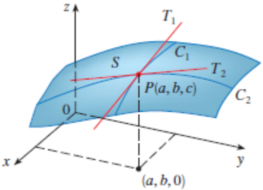
Algunos dibujos para ayudarnos a resolver el problema



Algunos dibujos para ayudarnos a resolver el problema



Intersecamos la ecuación del plano: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + z_0 = z$
con el plano $y = y_0$.
Nos queda $a(x - x_0) + z_0 = z$



¿Quién es a?
Si $z = f(x, y)$ la curva C_1 es $g(x) = f(x, y_0)$, luego

$$a = g'(x_0) = f_x(x_0, y_0).$$

Análogamente, si intersecamos con el plano $x = x_0$,
nos queda $b(y - y_0) + z_0 = z$ donde $b = f_y(x_0, y_0)$.

Plano tangente

Suponga que las derivadas parciales son continuas. La ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ es

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + z_0 = z.$$

Ejemplo: Calcule el plano tangente a $z = 2x^2 + y^2 = f(x, y)$ en el punto $(1, 1, 3)$.
Observar que $(1, 1, 3) = (1, 1, f(1, 1))$ tenemos que calcular $f_x(1, 1)$ y $f_y(1, 1)$. En efecto,

$$f_x(x, y) = 4x \qquad f_x(1, 1) = 4,$$

$$f_x(x, y) = 2y \qquad f_y(1, 1) = 2.$$

La ecuación del plano tangente queda

$$4(x - 1) + 2(y - 1) + 3 = z.$$

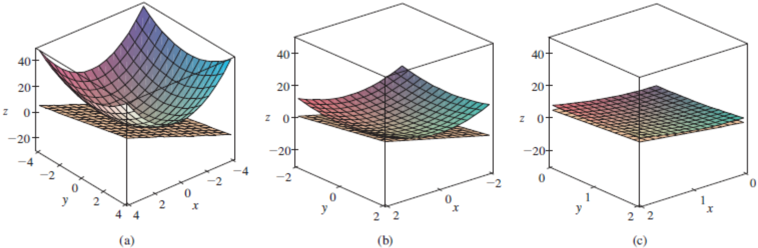
O dicho de otra forma

$$4x + 2y - 3 = z.$$

Sea $z = 2x^2 + y^2$ y $L(x, y) = 4(x-1) + 2(y-1) + 3$ decimos que L es la linealización de f en $(1, 1)$.

$$f(x, y) \approx 4(x-1) + 2(y-1) + 3$$

Es la aproximación lineal o aproximación del plano tangente a f en (1,1).



$$f(1.1, 0.95) \approx 4(1.1-1) + 2(0,95-1) - 3 = 3.3$$
$$f(1.1, 0.95) = 2(1.1)^2 + (0.95)^2 = 3.3225$$

Consideremos la siguiente función:

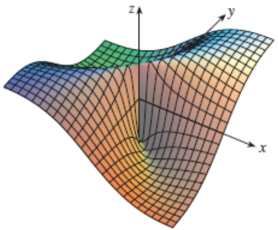
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Calculemos $f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$

Pero $f_x(x,y) = \frac{y(x^2+y^2)-2yx^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{yx^2+y^3-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}.$

Las derivadas parciales respecto a x e y no son continuas en el origen y $f_y(0,0) = f_x(0,0) = 0$.

$f(x,y) \approx f(0,0) + 0.(x-0) + 0.(y-0) = 0 \qquad f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$



Repaso Cálculo I

Recordemos la definición de derivada

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

En otras palabras

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) = 0$$

Obtenemos la siguiente expresión, donde $\varepsilon_1 \to 0$, cuando $\Delta x \to 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) = \varepsilon_1.$$

Luego,

$$\Delta y - f'(a)\Delta x = \varepsilon_1 \Delta x$$

Finalmente,

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x$$

Definición

Si $z = f(x, y)$ entonces f es diferenciable en (a, b) si Δz se puede expresar de la forma

$$\Delta z = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde ε_1 y ε_2 tienden a 0 cuando Δx y Δy tienden a 0.

Teorema

Si las derivadas parciales f_x y f_y existen cerca de (a, b) y son continuas en (a, b), entonces f es diferenciable en (a, b).

Ejemplo: $f(x, y) = x^2 + y^3 x$

- $f_x(x, y) = 2x + y^3$ es continua.
- $f_y(x, y) = 3y^2 x$ es continua.

Luego f es diferenciable.

Demostración

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b).$$

Sumando y restando $f(a, b + \Delta y)$, nos queda

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b + \Delta y) + f(a, b + \Delta y) - f(a, b).$$

Tomemos la función de una variable

$$g(x) = f(x, b + \Delta y) \qquad \text{entonces} \qquad g'(x) = f_x(x, b + \Delta y).$$

Por el teorema del valor medio

$$g(a + \Delta x) - g(a) = g'(u)\Delta x.$$

Análogamente,

$$h(y) = f(a, y) \qquad h'(y) = f_y(a, y) \qquad h(b + \Delta y) - h(b) = h'(v)\Delta y.$$

$$\begin{aligned}
\Delta z &= f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a, b+\Delta y) + f(a, b+\Delta y) - f(a,b) \\
&= g'(u)\Delta x + h'(v)\Delta y \\
&= f_x(u, b+\Delta y)\Delta x + f_y(u, b+\Delta y)\Delta y \\
&= f_x(a,b)\Delta x + (f_x(u, b+\Delta y) - f_x(a,b))\Delta x \\
&+ f_y(a,b)\Delta y + (f_y(u, b+\Delta y) - f_y(a,b))\Delta y \\
&= f_x(a,b)\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x + f_y(a,b)\Delta y + \varepsilon_2 \Delta y.
\end{aligned}$$

Observación: Cumple la definición de diferenciable.

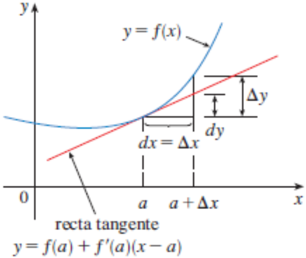
Diferenciales

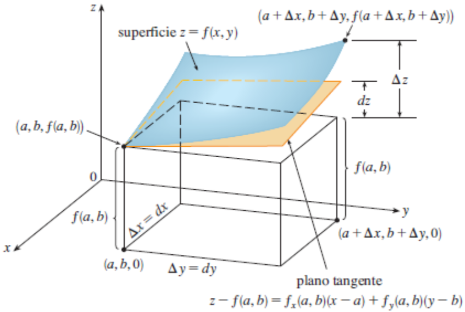
En Cálculo I, sea $y = f(x)$ se define su diferencial como: $dy = f'(x)dx$. Si

$$dy = f'(a)(x-a) \quad \text{entonces } f(x) \approx f(a) + dy \text{ cerca de a}$$

Sea $z = f(x,y)$ proponemos calcular su diferencial como:

$$dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$





Sea

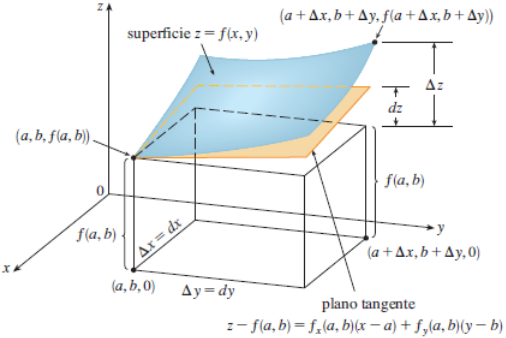
$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

Si tomamos $dx = x - a$ y $dy = y - b$, entonces

$$dz = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Luego

$$f(x, y) \approx f(a, b) + dz$$



Funciones de 3 o más variables

- La aproximación lineal es:

$$f(x,y,z) \approx f(a,b,c) + f_x(a,b,c)(x-a) + f_y(a,b,c)(y-b) + f_z(a,b,c)(z-c).$$

- Si $w = f(x,y,z)$ entonces el incremento es

$$\Delta w = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z).$$

- El diferencial de $dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz.$

Sea $y = f(x)$ y $x = g(t)$ (funciones de una variable).
¿Cómo se deriva la composición $y = f(g(t))$?
Respuesta:

$$\frac{dy}{dt} = f'(g(t))g'(t) = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Ahora, sea $z = f(x, y)$ diferenciable y sean $x = g(t)$ e $y = h(t)$

funciones derivables en t.
¿Cómo se deriva $z = f(g(t), h(t))$ como función de t?
Respuesta:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt}$$

Teorema: Caso 1 de Regla de la cadena

Suponga que $z = f(x, y)$ es una función de x e y diferenciable, donde $x = g(t)$ e $y = h(t)$ son funciones de t diferenciables. Entonces z es una función de t diferenciable y

$$\frac{dz}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt}.$$

Demostración

Por la definición de diferenciable sabemos

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y.$$

Si divimos la ecuación por Δt

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Tomando límite cuando $\Delta t \to 0$

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}.\\
&= \frac{\partial f}{\partial x} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_1 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_2 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}\\
&= \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt}.
\end{aligned}$$

Ejemplo: Sea $z = f(x, y) = x^2 + y^2$, $x(t) = \sin t$ e $y(t) = 3e^t$, calcular la derivada respecto de t de $z = f(x(t), y(t))$.
Observación: f es diferenciable y x e y son derivables.
Recordemos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt}.$$

En particular

$$\frac{df}{dx} = 2x, \quad \frac{df}{dy} = 2y, \quad \frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = 3e^t.$$

Luego

$$\frac{dz}{dt} = 2\sin t\cos t + 2.3e^t.3e^t = 2\sin t\cos t + 18e^{2t}.$$

Caso 2 de regla de la cadena

Suponga que $z = f(x, y)$ es una función diferenciable de x e y, donde $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ son funciones diferenciables de s y t. Entonces

$$\frac{dz}{ds} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{ds}.$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt}.$$

Idea: Estamos mirando las derivadas parciales de $z(s, t) = f(g(s, t), h(s, t))$.

Ejemplo: Sea $z = x^2 + y^2$, $x = s + t$, $y = st$. Calcular $\frac{dz}{ds}$.
Como todo es diferenciable podemos usar el teorema, es decir

$$\frac{dz}{ds} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{ds}.$$

En particular,

$$\frac{df}{dx} = 2x, \quad \frac{df}{dy} = 2y, \quad \frac{dx}{ds} = 1, \quad \frac{dy}{ds} = t.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \frac{dz}{ds} &= \frac{df}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{ds}. \\ &= 2(s+t).1 + 2(st)t = 2s + 2t + 2st^2. \end{aligned}$$

Ejercicio: Calcular $\frac{dz}{dt}$.

Regla de la cadena (versión general)

Teorema

Suponga que u es una función diferenciable de las n variables $x_1, \cdots, x_n$ y cada x_j es una función diferenciable de las m variables $t_1, \cdots, t_m$. Entonces u es una función de $t_1, \cdots, t_m$

$$\frac{du}{dt_i} = \frac{du}{dx_1}\frac{dx_1}{dt_i} + \cdots + \frac{du}{dx_n}\frac{dx_n}{dt_i}.$$

para cada $i = 1, \cdots, m$.

Ejemplos de derivación implicita

Suponemos que una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$ define a y en forma implícita como una función diferenciable de x, es decir, $y = f(x)$ donde $F(x, f(x)) = 0$ para toda x en el dominio de f.
Si F es diferenciable usamos regla de la cadena

$$\frac{dF}{dx}\frac{dx}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Además

$$\frac{dx}{dx} = 1 \quad \text{si } \frac{dF}{dy} \neq 0.$$

Despejando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}.$$

Ejemplo: Determine y', si $x^4 + y^4 = 2xy$.
Es decir
$$F = x^4 + y^4 - 2xy = 0.$$

Podemos usar
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}.$$

En particular
$$\frac{dF}{dx} = 4x^3 - 2y \qquad \frac{dF}{dy} = 4y^3 - 2x.$$

Finalmente
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x^3 - 2y}{4y^3 - 2x}.$$

Suponemos que z está dada en forma implícita como una función $z = f(x, y)$ mediante una ecuación de la forma $F(x, y, z(x, y)) = 0$. Si F y f son diferenciables,aplicamos regla de la cadena

$$\frac{dF}{dx}\frac{dx}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0.$$

Observemos que $\frac{dx}{dx} = 1$ y $\frac{dy}{dx} = 0$.
Luego,

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0.$$

Si $\frac{dF}{dz} \neq 0$,

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dz}} \qquad \frac{dz}{dy} = -\frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dz}}.$$