UNIDAD 1

FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES

Libro de referencia principal:

Cálculo de varias variables
(7ma Edición)

Autor:

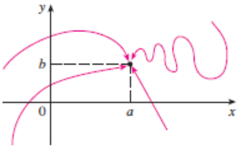
James Stewart

Plataforma virtual del curso: https://calculo2-unsl-1c2019.weebly.com

Dada una función (real) f de dos variables independientes, digamos x e y, en esta clase nos interesa principalmente analizar el comportamiento del valor $f(x, y)$ cuando (x, y) varía dentro del dominio D de f aproximándose cada vez más a un punto en particular, el cual podría o no pertenecer a $dom(f)$).

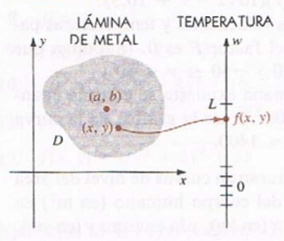
Dicho análisis puede realizarse, por analogía, también para funciones de tres o más variables.

Comentarios:



A diferencia de lo que ocurre en el *cálculo en una variable*, ahora hay "infinitas" maneras en las que los puntos del dominio de f pueden "acercarse" a un punto fijo (a, b), ya que dicho conjunto no "vive" en una recta (la recta real, $\mathbb{R}$) sino en un plano ($\mathbb{R}^2$). Algo similar ocurre con las funciones de tres variables, cuyo dominio es un subconjunto del espacio $\mathbb{R}^3$. También, con las funciones de más variables, cuyos dominios no se pueden representar visualmente...

EJEMPLO: **Supongamos que una lámina de metal plana tiene la forma de la región D de la siguiente figura:**



A cada punto (x, y) de la lámina le corresponde una temperatura $f(x, y)$, que se mide con un termómetro y se representaen el eje w...
Cuando un punto "se mueve" sobre la lámina, la temperatura correspondiente aumenta, disminuye o permanece constante y, por lo tanto, el punto que la representa en el eje w se mueve en la dirección positiva, en la dirección negativa, o permanece quieto, según el caso.

Si la temperatura $f(x, y)$ se aproxima a un valor fijo L cuando (x, y) está cada vez más cerca de un punto fijo (a, b), bien podríamos decir que "la temperatura tiende al *valor* L cuando los *puntos* sobre la lámina tienden a (a, b)".

OTRO EJEMPLO [p. 892]: **Consideremos las siguientes funciones expresadas, en principio, mediante fórmulas explícitas:**

$$f(x,y) = \frac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \qquad \text{y} \qquad g(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Observación: $dom(f) = dom(g) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Sin embargo, aunque ninguna de estas funciones está definida en el origen, podemos analizar y comparar el comportamiento de ambas cuando las variables x e y se aproximan a 0 (es decir, cuando el punto (x,y) se acerca al origen).

Para ello: **Consideremos ahora las representaciones numéricas dadas en las tablas siguientes, las cuales muestran los valores de $f(x,y)$ y de $g(x,y)$, con una aproximación de tres cifras decimales, para algunos puntos (x,y) cercanos a $(0,0)$.**

TABLA 1 Valores de $f(x, y)$

$x \backslash y$	-1.0	-0.5	-0.2	0	0.2	0.5	1.0
-1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455
-0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
-0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0	0.841	0.990	1.000		1.000	0.990	0.841
0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455

Observación 1: Aparentemente, **los valores de f se aproximan a** 1 **cuando los puntos de su dominio se acercan a** $(0, 0)$**.**

EJERCICIO 1: Analizar qué ocurre con los valores de $f(x, y)$ mostrados en la tabla anterior en los casos particulares en que (x, y) se acerca a $(0, 0)$ por el semieje x negativo, por el semieje y positivo y por la semirecta $y = x$ en el primer cuadrante.

TABLA 2 Valores de $g(x, y)$

$x \backslash y$	-1.0	-0.5	-0.2	0	0.2	0.5	1.0
-1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000
-0.5	-0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	-0.600
-0.2	-0.923	-0.724	0.000	1.000	0.000	-0.724	-0.923
0	-1.000	-1.000	-1.000		-1.000	-1.000	-1.000
0.2	-0.923	-0.724	0.000	1.000	0.000	-0.724	-0.923
0.5	-0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	-0.600
1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000

Observación 2: Aparentemente, **los valores de g no se aproximan a un único número cuando los puntos de su dominio se acercan a $(0, 0)$.**

EJERCICIO 2: Analizar qué ocurre con los valores de $g(x, y)$ mostrados en la tabla anterior en los casos particulares en que (x, y) se acerca a $(0, 0)$ por el semieje x negativo, por el semieje y positivo y por la semirecta $y = x$ en el primer cuadrante.

De ser correctas las conjeturas anteriores, diremos que (en este ejemplo)

- "el límite de $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$ es 1",

mientras que

- "$g(x, y)$ no tiene límite cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$",

y escribiremos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \textit{ no existe.}$$

En general, se utiliza la notación

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

para indicar que los valores de $f(x, y)$ se aproximan al número L cuando el punto (x, y) se acerca (tiende) al punto (a, b) por cualquier "trayectoria" contenida en el dominio de f. **Formalmente:**

Definición (**límite**)

Sea f una función real de dos variables cuyo dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ contiene puntos arbitrariamente cercanos a (a, b). Se dice que el límite de $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a (a, b) es L, y se escribe

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L,$$

si **para todo** *número $\varepsilon > 0$* **existe un** *correspondiente número $\delta > 0$ (que depende de ε) tal que:*

$$si\ (x, y) \in D \ \ y \ \ 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta,$$

$$entonces\ \ |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

Observaciones:

- $|f(x,y) - L|$ es la **distancia entre** los **números** $f(x,y)$ y L.
- $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ es la **distancia entre** los **puntos** (x,y) y (a,b) [o $(x,y,0)$ y $(a,b,0)$].

Por lo tanto (en palabras):

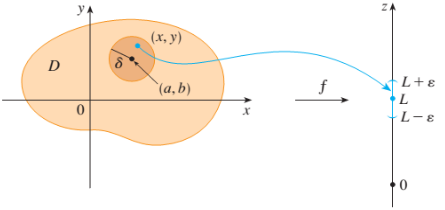
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

si podemos hacer el valor de $f(x,y)$ "tan cercano a L como queramos" [*distante de* L *en menos que* ε] tomando el punto (x,y) "suficientemente cercano al punto (a,b)" [*distante de* (a,b) *en menos que* δ], pero no igual a (a,b).

Otras notaciones usuales para el límite de la definición anterior son:

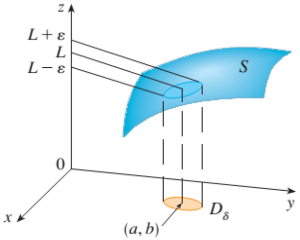
$$\lim_{x\to a,\ y\to b} f(x,y) = L \qquad \text{y} \qquad f(x,y) \to L \text{ cuando } (x,y) \to (a,b).$$

Ilustración de la definición anterior mediante un **diagrama de flechas**:



Se puede hacer el valor de $f(x, y)$ "*arbitrariamente cercano*" a L eligiendo el punto (x, y) "*suficientemente cercano*" a (a, b), pero diferente de (a, b).

Ilustración de la definición anterior mediante la **gráfica** de f:



Cuando el punto $(x, y, 0)$ tiende a $(a, b, 0)$ sobre el plano xy, el punto correspondiente $(x, y, f(x, y))$ en la gráfica S de f tiende a (a, b, L) (que puede o no estar en S).

EJEMPLO [p. 896]**: Utilizaremos la definición anterior para demostrar que**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$

$$\boxed{\text{Aquí } f(x,y) = \tfrac{3x^2y}{x^2+y^2},\ D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\},\ (a,b) = (0,0) \text{ y } L = 0.}$$

Dpq: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0:$

$$\left[(x,y) \in D \wedge 0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta\right] \Rightarrow \left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon$$

En efecto: Sea $\varepsilon > 0$ dado (fijo pero arbitrario). Si

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta,$$

entonces

$$\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} = 3|y|\frac{x^2}{x^2+y^2} \le 3|y| = 3\sqrt{y^2} \le 3\sqrt{x^2+y^2} < 3\delta.$$

Por lo tanto, tomando $\delta = \varepsilon/3$ se obtiene la desigualdad requerida.

Observación: La definición de límite se refiere sólo a la distancia entre (x, y) y (a, b), y no a la manera o dirección en que (x, y) "se acerca" a (a, b).

Por lo tanto: Si existe el límite, $f(x, y)$ debe aproximarse a un mismo valor L independientemente de cómo (x, y) se aproxime a (a, b).

Teorema (unicidad del límite)

El límite de $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a (a, b), si existe, es único.

EJERCICIO 3 (sólo matemáticos): Demostrar el teorema de unicidad del límite.

De lo anterior se desprende la siguiente **condición suficiente** (y práctica) para garantizar la NO existencia de un límite.

Teorema (regla de las dos trayectorias)

Si $f(x, y) \to L_1$ cuando $(x, y) \to (a, b)$ aproximándose por cierta trayectoria, y $f(x, y) \to L_2$ cuando $(x, y) \to (a, b)$ aproximándose por otra trayectoria, con $L_1 \neq L_2$, entonces $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ no existe.

EJEMPLO [p. 894]**:** Consideremos nuevamente la función

$$g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Demostraremos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) \text{ **no existe.**}$$

Esto confirmará la conjetura basada en la evidencia numérica de la tabla 2 del segundo ejemplo de esta clase.

Comencemos por analizar qué ocurre si el punto variable (x, y) se aproximan a $(0, 0)$ por el eje x. Para todos los puntos sobre esta recta, tenemos que $y = 0$, y así, siempre que $x \neq 0$,

$$g(x, y) = g(x, 0) = \frac{x^2 - 0^2}{x^2 + 0^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Entonces, $g(x, y) \to 1$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ por el eje x.

En segundo lugar, veamos qué ocurre si el puntos variable (x, y) se aproxima a $(0, 0)$ por el eje y. Para todos los puntos sobre esta recta, tenemos que $x = 0$, y así, siempre que $y \neq 0$,

$$g(x, y) = g(0, y) = \frac{0^2 - y^2}{0^2 + y^2} = \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

De este modo, $g(x, y) \to -1$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ por el eje y.

Luego, dado que el límite, de existir, es único (en virtud de la regla de las dos trayectorias), queda demostrado que $g(x, y)$ no tiene límite cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$.

Si nos enfocamos ahora en los límites que SÍ existen, no es dificil probar las siguientes igualdades básicas que, frecuentemente, resultan de gran ayuda a la hora de calcularlos:

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a} \qquad \boxed{\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b} \qquad \boxed{\lim_{(x,y)\to(a,b)} c = c}$$

A continuación, esbozaremos una demostración formal para la primera de ellas: En efecto, sea $\varepsilon > 0$ dado (fijo pero arbitrario), y supongamos que se cumple la desigualdad

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta,$$

para cierto $\delta > 0$ (cuyo valor debemos determinar). Entonces,

$$|x-a| = \sqrt{(x-a)^2} \leq \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta.$$

Luego, tomando $\delta = \varepsilon$ se obtiene la desigualdad requerida y, teniendo en cuenta que el número positivo ε fue elegido arbitrariamente, se verifica la definición de límite, q.p.q' $f(x,y) = x \to a$ cuando $(x,y) \to (a,b)$ ■

No menos importantes, como herramientas teóricas y como reglas prácticas para calcular límites, resultan las siguientes propiedades.

Teorema (**propiedades de los límites**)

Si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ *y* $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$, *entonces*

(i) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left[f(x,y) + g(x,y)\right] = L + M$

(ii) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left[f(x,y)g(x,y)\right] = LM$

(iii) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left[\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right] = \frac{L}{M}$ *si* $M \neq 0$

(iv) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left[cf(x,y)\right] = cL$ *para todo* $c \in \mathbb{R}$

(v) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left[f(x,y) - g(x,y)\right] = L - M$

EJERCICIO 4 (sólo para matemáticos): Demostrar las propiedades del cuadro anterior.

EJERCICIO 5: Teniendo en cuenta las propiedades de los límites y los límites básicos establecidos en los recuadros anteriores, demostrar que...

si c es cualquier número real y m y n son enteros no negativos, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} cx^m y^n = ca^m b^n$$

- Una función f de dos variables es una **función polinómica** si $f(x,y)$ se puede expresar como una suma de términos de la forma $cx^m y^n$, donde c es un número real y m y n son enteros no negativos. A dicha suma se le llama polinomio en las dos variables x e y.
- Una **función racional** de dos variables es un cociente de dos polinomios en dos variables.

Es fácil ver, como consecuencia de las propiedades de los límites y de lo establecido en el ejercicio anterior, que (como ocurre en una variable):

los límites de las funciones polinómicas y racionales de dos variables pueden calcularse por una simple sustitución (siempre que, en estas últimas, no se anule el denominador).

Esta forma particularmente sencilla de calcular límites mediante una sustitución directa de cada variable independiente por el valor al que ella tiende es, en realidad, una propiedad que caracteriza a una clase más general de funciones... La definimos a continuación...

Definición (continuidad en un punto)

Sea f una función real de dos variables con dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Se dice que f **es continua en el punto** *$(a, b) \in D$ si*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Definición (continuidad en una región)

Sean f y D como en la definición anterior, y sea R una región contenida en D. Diremos que f **es continua sobre** *R si es continua en todos los puntos de R.*

Intuitivamente... f es continua sobre una región R contenida en su dominio si cuando el punto variable (x, y) recorre una "distancia pequeña" dentro de R, el valor $f(x, y)$ también experimenta un "cambio pequeño".

Visualmente... f es continua sobre una región R contenida en su dominio si la parte de la gráfica de f correspondiente a R no tiene agujeros, saltos ni grietas.

Aplicando la definición de continuidad y las propiedades de los límites, se pueden demostrar, sin mayor dificultad, los siguientes hechos básicos:

- Las **sumas, diferencias, productos y cocientes de funciones continuas** son asímismo continuas sobre sus dominios.
- Las funciones simples $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$, $h(x, y) = c$ son continuas sobre $\mathbb{R}^2$.
- Las **funciones polinómicas** de dos variables son continuas sobre $\mathbb{R}^2$ (pues son sumas y productos de funciones como las del punto anterior).
- Las **funciones racionales** de dos variables son continuas sobre todo su dominio (donde no se anula el denominador).

EJEMPLO [p. 898]**: Analicemos la continuidad de la función**

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

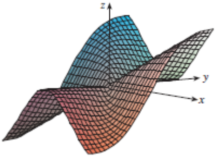
Por un lado, sabemos que f es continua en todo punto $(x,y) \neq (0,0)$, puesto que en ellos está definida como una función racional.

Por otra parte, hemos demostrado en un ejemplo anterior que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0, \quad \text{esto es,} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0),$$

lo que indica que f es continua también en el punto $(0,0)$.

Por lo tanto, la función de dos variables dada es continua sobre $\mathbb{R}^2$, es decir, sobre todo su dominio.



Además, tenemos (entre otras versiones similares) la propiedad de uso frecuente establecida en el teorema siguiente...

Teorema (**composición de funciones continuas**)

Si una función f de dos variables es continua en (a, b) y una función g de una variable es continua en $f(a, b)$, entonces la función h definida por $h(x, y) = g(f(x, y))$ es continua en (a, b).

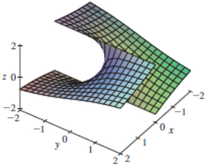
EJEMPLO [p. 898]**: Analicemos la continuidad de la función**

$$h(x, y) = \arctan(y/x)$$

Por un lado, sabemos que la función racional de dos variables $f(x, y) = y/x$ es continua en todos los puntos de su dominio, es decir, en todo $\mathbb{R}^2$ excepto sobre la recta $x = 0$ (eje y).

Por otra parte, aprendimos en CÁLCULO I / ANÁLISIS MATEMÁTICO I que la función de una variable $g(t) = \arctan t$ es continua sobre toda la recta real, y así, en particular, en cada número $f(x, y)$ en el rango de f.

Luego, en virtud del teorema anterior, concluimos que la función compuesta h es también continua sobre todo $\mathbb{R}^2$, excepto donde $x = 0$.



La teoría desarrollada en esta clase se generaliza de manera completamente análoga para funciones de tres o más variables.

Leer la generalización de las definiciones más importantes en p. 898.