

UNIDAD 1

FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES

Libro de referencia principal:

Cálculo de varias variables
(7ma Edición)

Autor:

James Stewart

Plataforma virtual del curso: <https://calculo2-unsl-1c2019.weebly.com>

FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES REALES

INTRODUCCIÓN

En CÁLCULO I / ANÁLISIS MATEMÁTICO I se han estudiado las funciones reales (esto es, que toman valores en \mathbb{R}) que tienen sólo una variable independiente (también real).

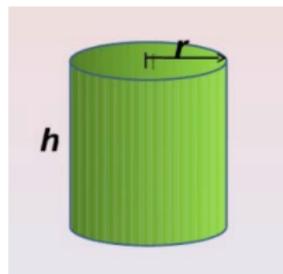
Sin embargo, es fácil observar que, en nuestro mundo, no son pocos los problemas que requieren tener en cuenta dos o más variables independientes. (A continuación, consideraremos algunos ejemplos...)

En esta clase se introducen las funciones reales con dos o más variables independientes (también reales).

FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES REALES

INTRODUCCIÓN

Supongamos, por ejemplo, que deseamos calcular el volumen V de un cilindro circular recto.



Dicho volumen depende de dos dimensiones independientes entre sí:

- el *radio* r
- la *altura* h

En efecto, tenemos la conocida fórmula: $V = \pi r^2 h$

Por lo tanto, podemos considerar a V como una función f de las dos variables r y h , o bien, del par (r, h) , y escribir:

$$V = f(r, h)$$

FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES REALES

INTRODUCCIÓN

Como segundo ejemplo, consideremos la temperatura T de los puntos de nuestro planeta que se encuentran al nivel del mar, en un instante dado (fijo).

El valor de T en cierto punto P depende de su “ubicación”, la cual queda determinada al especificar dos números reales independientes entre sí:

- la *longitud* x de P
- la *latitud* y de P

De este modo, podemos pensar a T como una función f de las *dos variables* x e y , o bien, del par (x, y) , y escribir:

$$T = f(x, y)$$

FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES REALES

INTRODUCCIÓN

Supongamos ahora que, en el mismo instante dado, puede ocurrir que los puntos cuya temperatura deseamos conocer no se encuentren al nivel del mar.

Entonces, para obtener el valor de T en cierto punto P resulta necesario especificar un tercer número real independiente de los dos antes mencionados:

- la *altitud* z de P

Con esto en mente, podemos ver a T como una función f de *tres variables* y escribir:

$$T = f(x, y, z)$$

FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES REALES

INTRODUCCIÓN



Por último, imaginemos que resulta también de interés la temperatura de dichos puntos en diferentes momentos.

En este caso, se incorpora a nuestro problema una nueva variable:

- el *instante* t en que se realiza la medición (de la temperatura)

Luego, podríamos decir que T es una función f de *cuatro variables* y escribir:

$$T = f(x, y, z, t)$$

FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES REALES

FUNCIONES DE DOS VARIABLES: Definiciones básicas

Definición

Una **función (real) f de dos variables (reales)** es una regla que asigna a cada par ordenado (x, y) en cierto subconjunto D de \mathbb{R}^2 un único número real que se denota por $f(x, y)$.

- El conjunto D se llama **dominio** de f .
- El número $f(x, y)$ se llama **valor de f en (x, y)** o **imagen de (x, y) bajo f** .
- El conjunto de todos los valores que toma f (simbólicamente: $\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$) se llama **rango** o **contradominio** de f .
- A veces se escribe $z = f(x, y)$ para “explicitar” el valor que toma f en el punto (x, y) . En este caso:
 - z es llamada **variable dependiente**
 - x e y son las **variables independientes**
 - se dice que “ z (o f) es una **función de x e y** ”.

FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES REALES

FUNCIONES DE DOS VARIABLES: Representación algebraica

Una función de dos variables se puede representar de varias maneras...

- Mediante una **fórmula explícita** (o **implícita**).

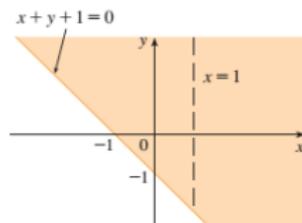
EJEMPLO 1 a) (p. 878): $f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$ (o bien, $z = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$)

En este caso, para obtener el valor de f en un punto dado, simplemente reemplazamos en la fórmula dada. **Por ejemplo:**

$$f(3, 2) = \frac{\sqrt{3+2+1}}{3-1} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

En esta forma de representación, cuando no se especifica dominio alguno, se entiende que éste consiste de todos los pares (x, y) en \mathbb{R}^2 para los cuales dicha fórmula tiene sentido en \mathbb{R} . **En nuestro ejemplo:**

$$D = \{(x, y) \mid x + y + 1 \geq 0, x \neq 1\}$$



FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES REALES

FUNCIONES DE DOS VARIABLES: Representación numérica

- Por medio de una **tabla de valores**.

EJEMPLO 2 (p. 879): La siguiente tabla muestra el índice de sensación térmica S como una función de la temperatura real T y de la rapidez del viento v . De este modo, podemos escribir $S = f(T, v)$. En particular, por ejemplo, $f(-5, 50) = -15$ y se interpretará que cuando la temperatura real es de 5°C y el viento se desplaza a 50 km/h , subjetivamente se sentirá tanto frío como si la temperatura fuera de -15°C sin viento.

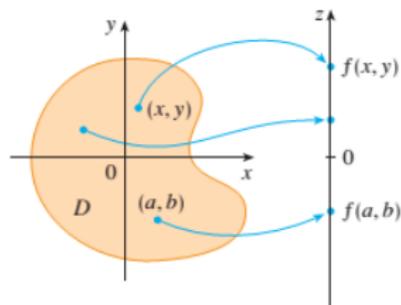
		Rapidez del viento (km/h)										
		5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
Temperatura real ($^\circ\text{C}$)	$T \backslash v$	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
	5	4	3	2	1	1	0	-1	-1	-2	-2	-3
	0	-2	-3	-4	-5	-6	-6	-7	-8	-9	-9	-10
	-5	-7	-9	-11	-12	-12	-13	-14	-15	-16	-16	-17
	-10	-13	-15	-17	-18	-19	-20	-21	-22	-23	-23	-24
	-15	-19	-21	-23	-24	-25	-26	-27	-29	-30	-30	-31
	-20	-24	-27	-29	-30	-32	-33	-34	-35	-36	-37	-38
	-25	-30	-33	-35	-37	-38	-39	-41	-42	-43	-44	-45
	-30	-36	-39	-41	-43	-44	-46	-48	-49	-50	-51	-52
	-35	-41	-45	-48	-49	-51	-52	-54	-56	-57	-58	-60
-40	-47	-51	-54	-56	-57	-59	-61	-63	-64	-65	-67	

FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES REALES

FUNCIONES DE DOS VARIABLES: Representación "visual"

- Mediante un **diagrama de flechas**, una **gráfica** o **curvas de nivel**.

En un **diagrama de flechas** el dominio se representa por puntos en el plano xy , y el contradominio, por puntos en la recta real, la cual se suele mostrar como un tercer eje (z) al costado de dicho plano.



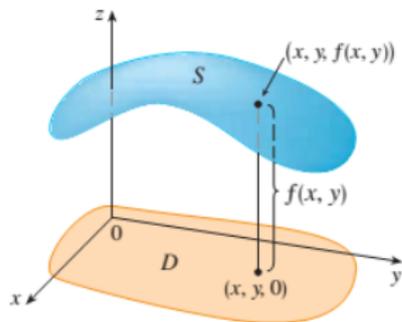
Por ejemplo, si $f(x, y)$ representa la temperatura en un punto (x, y) de una placa metálica plana con la forma de D [ver figura], podemos considerar al eje z como un termómetro que muestra el registro de temperatura de ciertos puntos.

NOTA: Esta representación resulta más adecuada cuando el dominio de f es un conjunto finito o cuando sólo interesa visualizar su comportamiento en unos "pocos" puntos.

FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES REALES

FUNCIONES DE DOS VARIABLES: Representación "visual"

La **gráfica** de f es la representación, en un sistema de coordenadas rectangulares tridimensional, de todos los puntos (x, y, z) tales que (x, y) pertenece al dominio de f y $z = f(x, y)$.



Dicha gráfica es, en general, una superficie S de ecuación $z = f(x, y)$ [ver figura].

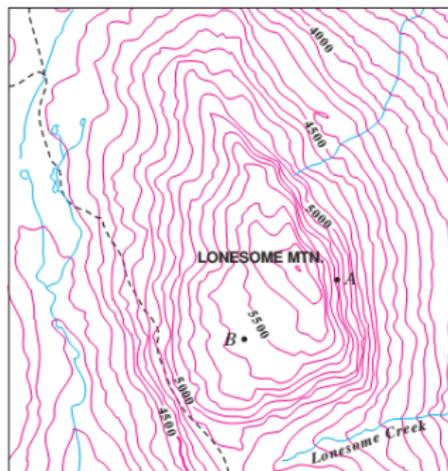
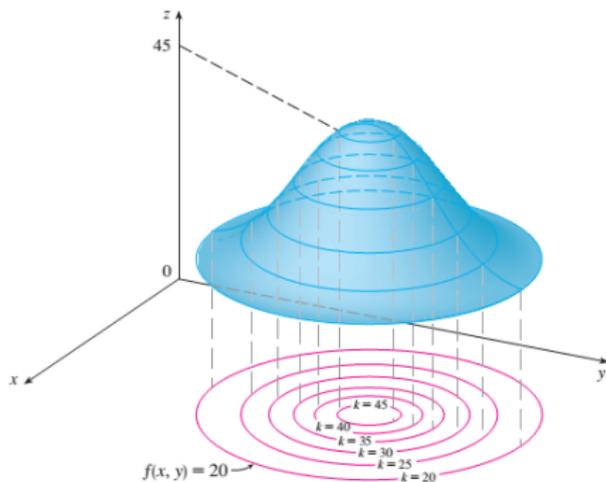
Leer EJEMPLO 5 y EJEMPLO 6 (p. 881).

FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES REALES

FUNCIONES DE DOS VARIABLES: Representación "visual"

Las **curvas de nivel** de f son las gráficas en el plano xy de las ecuaciones de la forma $f(x, y) = k$, donde k es una constante en el contradominio de f .

Un ejemplo común de la utilización de curvas de nivel se encuentra en los mapas topográficos de regiones montañosas [ver figuras a continuación].



FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES REALES

FUNCIONES DE DOS VARIABLES: Representación "visual"

Observaciones:

- Cuando un punto (x, y) en el dominio de f "se mueve" sobre una misma curva de nivel, los valores $f(x, y)$ de la función no cambian, (por lo tanto, tampoco cambia la "altura" o el "nivel" correspondiente a estos puntos en la gráfica de f)
- La curva de nivel con ecuación $f(x, y) = k$ no es otra cosa que la traza de la gráfica de f en el plano horizontal $z = k$, proyectada en el plano xy .
- Dibujando varias curvas de nivel (en el plano xy) y trasladando o imaginando cada una de ellas a la altura indicada por la constante correspondiente, nos podemos formar una imagen mental de la gráfica de la función $f(x, y)$. Para ello, generalmente resulta conveniente tomar valores equidistantes de k .

La teoría desarrollada en esta sección se generaliza de manera completamente análoga para funciones de tres o más variables. Sin embargo, debemos tener en cuenta algunas consideraciones:

- Si f es una función de tres variables, digamos x , y y z , las gráficas (tridimensionales) de las ecuaciones de la forma $f(x, y, z) = k$ con k en el contradominio de f , se llaman **superficies de nivel** de f . [Leer EJEMPLO 15, p. 887.](#)
- No se puede esbozar una “gráfica” (en el sentido antes definido) de funciones de tres o más variables (ya que nuestro espacio es tridimensional y esto implicaría “dibujar” en cuatro dimensiones o más).